

20 OKTOBER 2021

POOLCOÖRDINATEN EN PARAMETERVERGELIJKINGEN

Prof. dr. ir. Jan Baetens



OVERZICHT

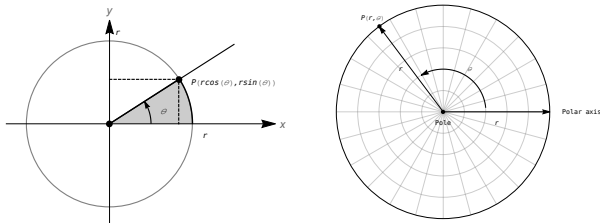
1 POOLCOÖRDINATEN

2 PARAMETERVERGELIJKINGEN

3 AFLEIDEN EN PARAMETER- EN POOLVERGELIJKINGEN

Prof. dr. ir. Jan Baetens 2 / 24

PUNTEN TE IDENTIFICEREN MET POOLCOÖRDINATEN



- $x = r \cos(\theta)$ en $y = r \sin(\theta)$
- $x^2 + y^2 = r^2$ en $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ ($x \neq 0$)

Poolcoördinaten

EXTRA VOORBEELD



Druk de positie van het punt $P(-3, -3)$ uit in poolcoördinaten.

Notes

Notes

Notes

Notes

DE ARCTAN2-FUNCTIE BEKIJKT OOK KWADRANT

$$\arctan_2(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & , \text{ als } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & , \text{ als } x < 0 \wedge y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & , \text{ als } x < 0 \wedge y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & , \text{ als } x = 0 \wedge y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , \text{ als } x = 0 \wedge y < 0 \\ \text{niet gedefinieerd} & , \text{ als } x = 0 \wedge y = 0 \end{cases}$$

Prof. dr. ir. Jan Baetens

6 / 24

Notes

EXTRA VOORBEELD



Druk de positie van het punt $P(-3, -3)$ uit in poolcoördinaten.

Prof. dr. ir. Jan Baetens

7 / 24

Notes

EXTRA VOORBEELD



Druk de vergelijking $y = x^2$ uit in poolcoördinaten.

Oplossing

W

Prof. dr. ir. Jan Baetens

8 / 24

Notes

GRAFIEK VAN EEN POOLVERGELIJKING (EXTRA VB)



Schets de grafiek van de functie $r(\theta) = 4 \cos(\theta)$

Prof. dr. ir. Jan Baetens

9 / 24

Notes

OVERZICHT

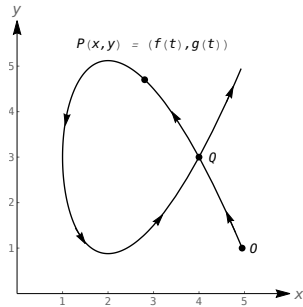
1 POOLCOÖRDINATEN

2 PARAMETERVERGELIJKINGEN

3 AFLEIDEN EN PARAMETER- EN POOLVERGELIJKINGEN

Notes

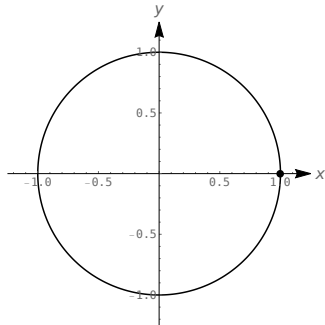
PARAMETERVERVOORSTELLING: x EN y GESTUURD



Notes

PARAMETERVERVOORSTELLING DEFINIEERT ORIËNTATIE

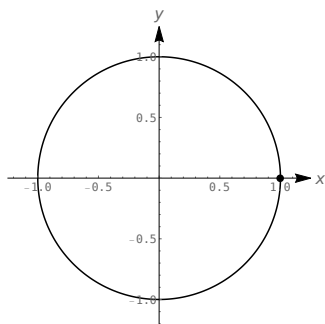
$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$$



Notes

PARAMETERVERVOORSTELLING DEFINIEERT ORIËNTATIE

$$\begin{cases} x = \cos(-t) \\ y = \sin(-t) \end{cases}$$



Notes

EXTRA VOORBEELD



Schets de grafiek van de $x = 2e^{-t}$, $y = e^{-2t}$ voor $t \geq 0$.

Oplossing



Notes

OVERZICHT

1 POOLCOÖRDINATEN

2 PARAMETERVERGELIJKINGEN

3 AFLEIDEN EN PARAMETER- EN POOLVERGELIJKINGEN

Notes

RICO VAN EEN RAAKLIJN AAN EEN KROMME?

1 Parametervergelijkingen: $x = f(t)$ en $y = g(t)$

- Helling raaklijn: $\frac{dy}{dx}$
- Kettingregel:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} \iff \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt}$$

2 Poolvergelijkingen: $x = f(\theta) \cos(\theta)$ en $y = f(\theta) \sin(\theta)$

- Kettingregel

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{d\theta} \bigg/ \frac{dx}{d\theta} \\ &= \frac{f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta}{f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta} \end{aligned}$$

Notes

VOORBEELD 11.11

Bepaal de normaal aan de limaçon $r = 1 + 2 \sin(\theta)$ in $\theta = \pi/4$. Bepaal tevens de raaklijnen aan de grafiek ter hoogte van de pool.

Oplossing

1 Parametervergelijkingen

$$\begin{cases} x = (1 + 2 \sin(\theta)) \cos(\theta) \\ y = (1 + 2 \sin(\theta)) \sin(\theta) \end{cases}$$

2 Afleiden naar θ

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = 2 \cos^2(\theta) - \sin(\theta)(1 + 2 \sin(\theta)) \\ \frac{dy}{d\theta} = 2 \cos(\theta) \sin(\theta) + \cos(\theta)(1 + 2 \sin(\theta)) \end{cases}$$

Notes

VOORBEELD 11.11

Bepaal de normaal aan de limaçon $r = 1 + 2 \sin(\theta)$ in $\theta = \pi/4$. Bepaal tevens de raaklijnen aan de grafiek ter hoogte van de pool.

Oplossing

2 Afliden naar θ

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = 2 \cos^2(\theta) - \sin(\theta)(1 + 2 \sin(\theta)) \\ \frac{dy}{d\theta} = 2 \cos(\theta) \sin(\theta) + \cos(\theta)(1 + 2 \sin(\theta)) \end{cases}$$

3 Helling raaklijn

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cos(\theta) \sin(\theta) + \cos(\theta)(1 + 2 \sin(\theta))}{2 \cos^2(\theta) - \sin(\theta)(1 + 2 \sin(\theta))}$$

4 Rico bij $\theta = \pi/4$: $-2\sqrt{2} - 1$

5 Normaal:

$$y = (2\sqrt{2} + 1)^{-1} (x - (1 + \sqrt{2}/2)) + 1 + \sqrt{2}/2$$

Prof. dr. ir. Jan Baetens

18 / 24

Notes

VOORBEELD 11.11

Bepaal de normaal aan de limaçon $r = 1 + 2 \sin(\theta)$ in $\theta = \pi/4$. Bepaal tevens de raaklijnen aan de grafiek ter hoogte van de pool.

Oplossing

6 θ waarvoor $r = 0$

$$1 + 2 \sin(\theta) = 0 \iff \sin(\theta) = -\frac{1}{2} \iff \theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

7 Raaklijnen

1 Poolcoördinaten: $\theta = \frac{7\pi}{6}$ en $\theta = \frac{11\pi}{6}$ 2 Cartesische coördinaten: $y = \tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)x$ en $y = \tan\left(\frac{11\pi}{6}\right)x$

Prof. dr. ir. Jan Baetens

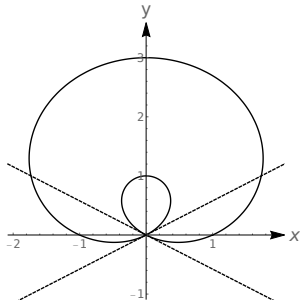
19 / 24

Notes

VOORBEELD 11.11

Bepaal de normaal aan de limaçon $r = 1 + 2 \sin(\theta)$ in $\theta = \pi/4$. Bepaal tevens de raaklijnen aan de grafiek ter hoogte van de pool.

Oplossing



Prof. dr. ir. Jan Baetens

20 / 24

Notes

EXTRA VOORBEELD



Bepaal de concaviteit van de limaçon $r = 1 + 2 \sin(\theta)$ indien $\theta = \pi/4$.

Oplossing

1 Gevraagd

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy'}{dx}$$

2 Uit Voorbeeld 11.11

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{2 \sin(2\theta) + \cos(\theta)}{2 \cos(2\theta) - \sin(\theta)}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = 2 \cos^2(\theta) - \sin(\theta)(1 + 2 \sin(\theta))$$

Prof. dr. ir. Jan Baetens

21 / 24

Notes

EXTRA VOORBEELD



Bepaal de concaviteit van de limaçon $r = 1 + 2 \sin(\theta)$ indien $\theta = \pi/4$.

Oplossing

3 Afgeleide van y'

$$\frac{dy'}{d\theta} = \frac{9 + 6 \sin(\theta)}{(2 \cos(2\theta) - \sin(\theta))^2}$$

4 Concaviteit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{d\theta} \bigg/ \frac{dx}{d\theta} = \frac{9 + 6 \sin(\theta)}{2 \cos^2(\theta) - \sin(\theta)(1 + 2 \sin(\theta))}$$

5 Concaviteit indien $\theta = \pi/4$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \bigg|_{\theta=\pi/4} = \frac{-36 - 12\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

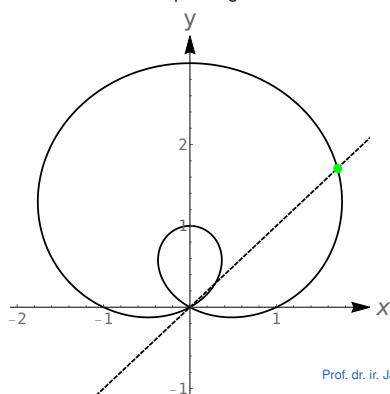
Notes

EXTRA VOORBEELD



Bepaal de concaviteit van de limaçon $r = 1 + 2 \sin(\theta)$ indien $\theta = \pi/4$.

Oplossing



Notes

EVEN RECAPITULEREN...

Notes

Notes
