FACULTEIT BIO-INGENIEURSWETENSCHAPPEN

12 OKTOBER 2021

INTEGRATIE

Prof. dr. ir. Jan Baetens

UNIVERSITEIT GENT

Notes

OVERZICHT

Notes

Definitie 12.1: Primitieve functie en obepaalde integralen

Een primitieve functie van een functie $f(x)$ is een functie $F(x)$ waarvoor geldt dat $F'(x) = f(x)$. De verzameling van alle primitieve functies van $f(x)$ is de onbepaalde integraal van f:

$$\int f(x)\,dx$$

- $\int e^x\,dx = e^x + C,$
- $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln(a)}a^x + C,$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,$

Notes

EIGENSCHAPPEN ONBEPAALDE INTEGRALEN

Zij f en g afleidbaar over open interval I en zij $k \in \mathbb{R}$, dan geldt

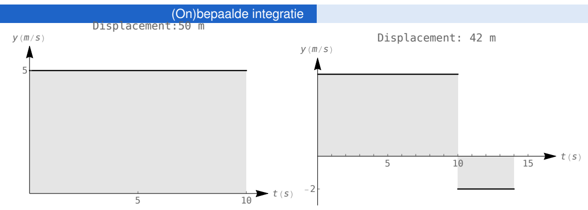
1. Som/verschil:

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx\,.$$

2. Vermenigvuldiging met een constante:

$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx\,.$$

Notes



Definitie 12.2: De bepaalde integraal, netto oppervlakte

Zij $y = f(x)$ gedefinieerd over $[a, b]$. De netto opp. van $x = a$ tot $x = b$ tussen de grafiek van f en de x-as is:

(opp. onder f en boven de x–as) $-$ (opp. boven f en onder de x–as).

De bepaalde integraal van f over $[a, b]$ is de netto oppervlakte van f over $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Notes

EIGENSCHAPPEN BEPAALDE INTEGRALEN

Zij f en g gedefinieerd over een gesloten interval I dat a, b en c bevat en zij $k \in \mathbb{R}$, dan geldt:

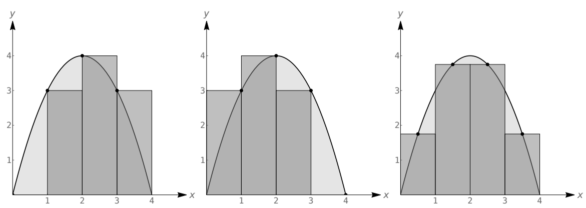
1. $\int_a^a f(x)\, dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$
3. $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$
4. $\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$
5. $\int_a^b k\, f(x)\, dx = k \cdot \int_a^b f(x)\, dx$

Notes

OVERZICHT

Notes

BENADEREN VAN OPPERVLAKTES DMV RECHTHOEKEN



Notes

Definitie 12.3: Partitie

Een partitie van $[a, b]$ is een geordende verzameling getallen x_1, x_2, ... x_{n+1} met

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b.$$

De lengte van $[x_i, x_{i+1}]$ is $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. De grootte van de partitie $\mathcal{L}$ is de lengte van het grootste subinterval ($\mathcal{L} = \max_i(\Delta x_i)$).

Definitie 12.4: Riemannsom

Zij f gedefinieerd over $[a, b]$, zij $\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ een partitie van $[a, b]$ en zij c_i gelegen in het i-de subinterval. De som

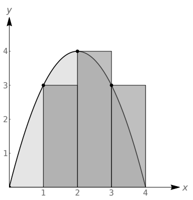
$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

is een Riemannsom van f over $[a, b]$.

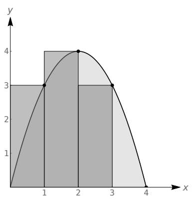
Notes

Bepaalde integratie is sommeren van oppervlaktes

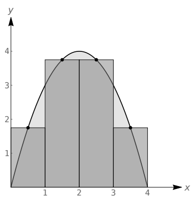
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$



$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$



$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i+1})\Delta x$$



$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\Delta x$$

Notes

Voorbeeld 12.5

$$\int_0^4 (4x - x^2)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i+1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{4i}{n}\right)\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[4\frac{4i}{n} - \left(\frac{4i}{n}\right)^2\right]\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{16\Delta x}{n}\right) i - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{16\Delta x}{n^2}\right) i^2$$

$$= \left(\frac{16\Delta x}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} i - \left(\frac{16\Delta x}{n^2}\right)\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \left(\frac{16\Delta x}{n}\right)\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \left(\frac{16\Delta x}{n^2}\right)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{32(n+1)}{n} - \frac{32(n+1)(2n+1)}{3n^2} = \frac{32}{3}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Notes

Stelling 12.4: bepaalde integralen en de limiet van Riemannsommen

Zij f continu over $[a, b]$, dan

1. $\lim_{n\to+\infty} S_L(n) = \lim_{n\to+\infty} S_R(n) = \lim_{n\to+\infty} S_M(n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$
2. $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$
3. $\lim_{\mathcal{L}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$

Notes

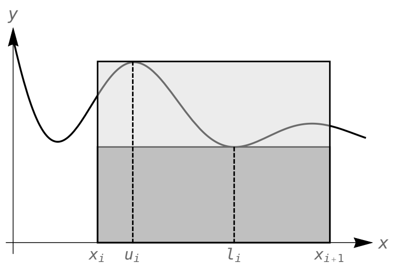
EIGENSCHAPPEN MBT GROOTTE VAN BEPAALDE INTEGRALEN

Zij f en g gedefinieerd over $[a, b]$ en m en M constanten, dan

1. Als $f(x) \geq 0$ voor $a \leq x \leq b$, dan
$$\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$$
2. Als $f(x) \geq g(x)$ voor $a \leq x \leq b$ dan
$$\int_a^b f(x)\ dx \geq \int_a^b g(x)\ dx$$
3. $$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$$

Notes

BOVEN- EN ONDER RIEMANNSOM BEPAALD DOOR BEELD



$$S_l(n) = \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x \qquad S_u(n) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x$$

Notes

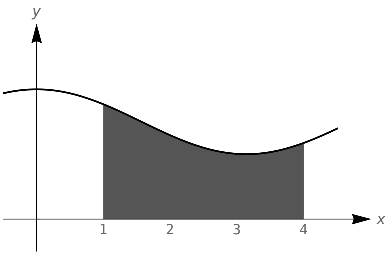
BOVEN, ONDER, LINKS EN RECHTS SOMS HETZELFDE

Notes

OVERZICHT

Notes

MIDDELWAARDESTELLING

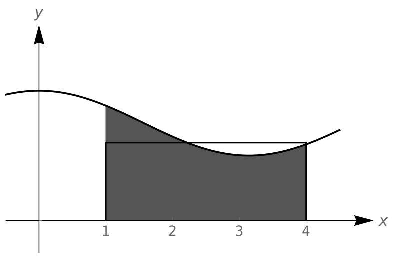


Notes

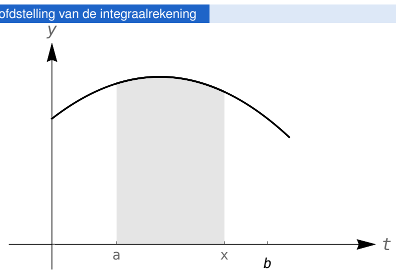
Stelling 12.6: Middelwaardestelling (van de integraalrekening)

Zij $y = f(x)$ een continue functie over $[a, b]$, dan bestaat er een $c \in]a, b[$ waarvoor geldt dat

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b - a)$$



Notes



Stelling 12.7: Hoofdstelling van de integraalrekening (Deel 1)

Zij f continu over $[a, b]$ en zij $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, dan is F afleidbaar over $]a, b[$ en

$$F'(x) = f(x)$$

Notes

ANALYTISCH BEREKENEN VAN BEPAALDE INTEGRALEN

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\, dt &= \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt \\ &= -\int_c^a f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt\end{aligned}$$

Stel $F(x) = \int_c^x f(t)\, dt$

$$\begin{aligned}&= -F(a) + F(b) \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

Notes

Stelling 12.8: hoofdstelling van de integraalrekening (Deel 2)

Zij f continu over $[a, b]$ en zij F een primitieve functie van f, dan

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Notes

EXTRA VOORBEELD

Bereken

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\, dx$$

Notes

EXTRA VOORBEELD

Bereken $F'(x)$ indien

$$F(x) = \int_0^{e^x} 4^t\, dt$$

Notes

BEPAALDE INTEGRALEN DRUKKEN NETTO VERANDERING UIT

Ogenblikkelijke verandering

- Bewegingssnelheid
- Debiet
- Hoeksnelheid
- Emissiesnelheid
- Verbruikssnelheid

Netto verandering

- Verplaatsing
- Volume
- Uitwijking
- Emissie
- Verbruik

Notes

Extra voorbeeld

Water stroomt in een leeg wachtbekken met een debiet (m^3/u) gegeven door $d(t) = 130 + 2t$. Bepaal de hoeveelheid water die in dit wachtbekken aanwezig zal zijn na 1) T uur en 2) 10uur en de hoeveelheid water die er gemiddeld tijdens de eerste 10 uur aanwezig is in het wachtbekken.

Notes

Overzicht

Notes

Analytisch integreren is niet (zo) evident

1. Directe integratie (na vereenvoudiging)
2. Substitutie
3. Partiële integratie
4. Integratie van goniometrische functies
5. Goniometrische substitutie
6. Splitsen in partieelbreuken

Notes

Extra voorbeeld

Bereken

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{\arctan(y)}}{1+y^2}\,dy$$

Notes

EXTRA VOORBEELD

Bepaal

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Notes

OVERZICHT

Notes

ONEIGENLIJKE INTEGRALEN VAN DE EERSTE SOORT

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Notes

ONEIGENLIJKE INTEGRALEN VAN DE TWEEDE SOORT

- $f(x)$ niet continu in $x = a$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\substack{t\to a\\ >}} \int_t^b f(x)\ dx$$

- $f(x)$ niet continu in $x = b$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\substack{t\to b\\ <}} \int_a^t f(x)\ dx$$

- $f(x)$ niet continu in $c \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\substack{t\to c\\ <}} \int_a^t f(x)\ dx + \lim_{\substack{t\to c\\ >}} \int_t^b f(x)\ dx.$$

Notes

EXTRA VOORBEELD

Bereken

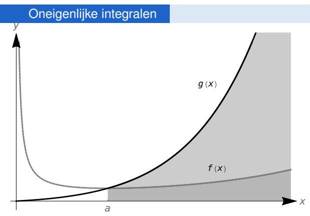
$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$$

Notes

Bereken

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$$

Notes

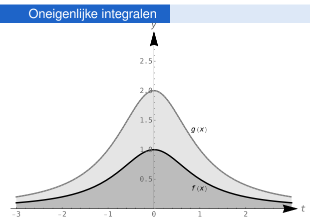


Stelling 12.9: vergelijkende test oneigenlijke integralen 1ste soort

Zij f en g continu over $[a, +\infty[$ met $0 \leq f(x) \leq g(x)$ voor alle x in $[a, +\infty[$.

1. Als $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ convergeert, dan convergeert $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$.
2. Als $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ divergeert, dan divergeert $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$.

Notes



Stelling 12.11: vergelijkende test oneigenlijke integralen 2de soort

Zij f en g continu over $[a, x_0[$ met $0 \leq f(x) \leq g(x)$ voor alle x in $[a, x_0[$.

1. Als $\displaystyle\int_a^{x_0} g(x)\, dx$ convergeert, dan convergeert $\displaystyle\int_a^{x_0} f(x)\, dx$.
2. Als $\displaystyle\int_a^{x_0} f(x)\, dx$ divergeert, dan divergeert $\displaystyle\int_a^{x_0} g(x)\, dx$.

Notes

EXTRA VOORBEELD

Ga de convergentie na van de volgende integraal

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{2 + e^x}\, dx$$

Notes

Stelling 12.12: vergelijkende limiettest oneigenlijke integralen 1ste soort

Zij f en g continu over $[a, +\infty[$ met $f(x) > 0$ en $g(x) > 0$ voor alle x in $[a, +\infty[$. Als

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \qquad 0 < L < +\infty$$

dan

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \text{ is convergent} \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^{+\infty} g(x)\, dx \text{ is convergent}$$

of equivalent hieraan

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \text{ is divergent} \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^{+\infty} g(x)\, dx \text{ is divergent}$$

Notes

VOORBEELD 12.30

Bepaal de convergentie van

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}\, dx$$

Notes

EVEN RECAPITULEREN...

Notes