Q: What is the first derivative of a cow?
A: Prime Rib!

— Queen Elizabeth II —

9 Afgeleiden en hun toepassingen

In het vorige hoofdstuk hebben we het meest fundamentele begrip uit calculus bestudeerd: de limiet. In dit hoofdstuk bekijken we het tweede belangrijkste: de afgeleide. Terwijl limieten bepalen waar een functie naartoe evolueert, beschrijven afgeleiden hoe snel een functie verandert.

9.1 Gemiddelde en ogenblikkelijke snelheid

9.1.1 Uit de praktijk

Een klassieke pretparkattractie katapulteert de inzittenden omhoog om ze vervolgens een vrije val te laten maken over een zekere afstand vooraleer veilig af te remmen. Stel dat zo'n attractie de inzittenden laat vallen van een hoogte van 150 meter. Uit de fysica weten we dat de hoogte (in meter) van de inzittenden, t seconden na de start van de vrije val (waarbij we geen rekening houden met luchtweerstand, etc.) gemodelleerd kan worden door $f(t) = -16t^2 + 150$. Dat laat ons toe om te berekenen dat de inzittenden, zonder af te remmen, de grond zouden bereiken na $t = 2.5\sqrt{1.5} \approx 3.06$ seconden, maar aan welke snelheid zullen ze vallen na bijvoorbeeld twee seconden?

We hebben een functie f voor de hoogte, maar we willen de snelheid op een specifiek tijdstip, d.i. de ogenblikkelijke snelheid. De gemiddelde snelheid kunnen we berekenen via het differentiequotiënt (Sectie 8.1):

$$\frac{\text{afgelegde afstand}}{\text{verstreken tijd}} = \text{gemiddelde snelheid.}$$

We kunnen de ogenblikkelijke snelheid op $t = 2$ benaderen door te kijken naar de gemiddelde snelheid gedurende een tijdsinterval dat $t = 2$ bevat. Als we dat tijdsinterval kort kiezen, krijgen we een goede benadering. Beschouw bijvoorbeeld het interval van $t = 2$ tot $t = 3$. Over dat interval is de gemiddelde snelheid gelijk aan

$$\frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{f(3)-f(2)}{1} = -80 \text{ m/s},$$

waarbij het minteken aangeeft dat de inzittenden naar beneden bewegen. Door het interval te verkleinen, krijgen we een betere benadering voor de ogenblikkelijke snelheid. Over $[2,2.5]$ hebben we

$$\frac{f(2.5)-f(2)}{2.5-2}=\frac{f(2.5)-f(2)}{0.5}=-72 \text{ m/s.}$$

We kunnen dat herhalen voor steeds kleinere tijdsintervallen. Zo krijgen we voor een tijdspanne van $1/10$-de van een seconde:

$$\frac{f(2.1)-f(2)}{2.1-2}=\frac{f(2.1)-f(2)}{0.1}=-65.6 \text{ m/s.}$$

Analoog vinden we voor een tijdspanne van 1/100$^{\text{de}}$ van een seconde (over $[2,2.01]$) dat de gemiddelde snelheid gelijk is aan:

$$\frac{f(2.01)-f(2)}{2.01-2}=\frac{f(2.01)-f(2)}{0.01}=-64.16 \text{ m/s.}$$

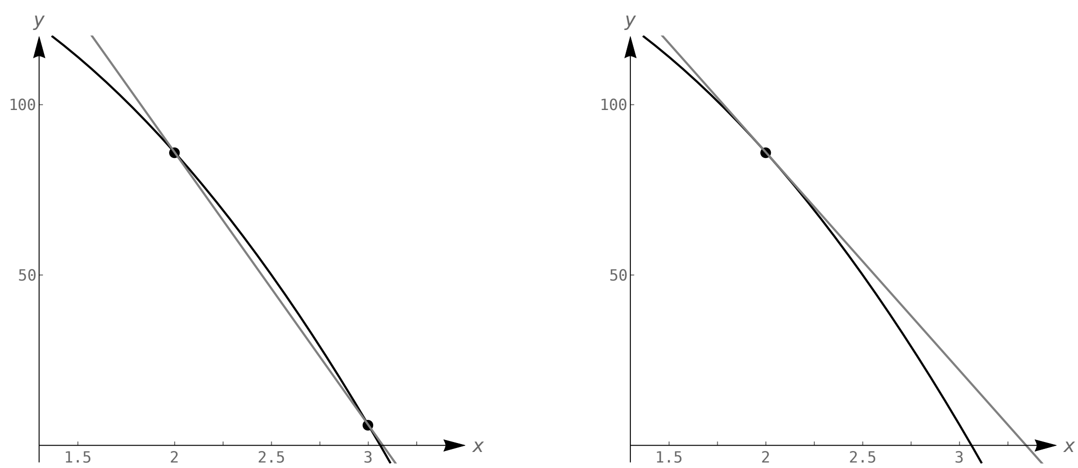
Algemeen berekenen we de gemiddelde snelheid over het interval $[2,2+h]$ voor kleine waarden van h

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h},$$

waarbij h klein is. Ergens willen we natuurlijk dat $h=0$, maar dat leidt helaas tot de onbepaaldheid $0/0$. Als we echter de limiet bepalen voor $h \to 0$, vinden we

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{-16(2+h)^2+150-(-16(2)^2+150)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-64h-16h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(-64-16h)=-64\,.\end{aligned}$$

Grafisch kunnen we de gemiddelde snelheid opvatten als de richtingscoëfficiënt van de snijlijn met de grafiek van f door de punten $(2,f(2))$ en $(2+h,f(2+h))$. In Figuur 9.1(a) kan je de snijlijn zien voor $h=1$. Merk op hoe goed die de grafiek van f benadert tussen die twee punten. Als $h \to 0$, komt de snijlijn steeds beter overeen met de **raaklijn** (*tangent line*), dit is de rechte door het punt $(2,f(2))$ met richtingscoëfficiënt -64 (Figuur 9.1(b)).



Figuur 9.1: De snijlijn van $f(x)$ met $h=1$ (a) en de raaklijn van f in $x=2$ (b).

9.1.2 Definities

We geven nu een formele definitie van de afgeleide.

Definitie 9.1 (Afgeleide in een punt)

Zij f een continue functie over een open interval I en zij $c \in I$. De **afgeleide** (*derivative*) van f in c, genoteerd als $f'(c)$, is

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h},$$

mits de limiet bestaat. Als de limiet bestaat zeggen we dat f afleidbaar is in c; als de limiet niet bestaat, is f niet afleidbaar in c. Als f **afleidbaar** (*differentiable*) is in elk punt van I, noemen we f afleidbaar over I. Daarnaast noemen we f continu afleibaar over I indien f' continu is over I.

Met behulp van deze definitie kunnen we nu een raaklijn aan de grafiek van een functie f definiëren.

Definitie 9.2 (Raaklijn)

Zij f een continue functie over een open interval I die afleidbaar is in $c \in I$, dan is de rechte met vergelijking

$$y = \ell(x) = f'(c)(x-c) + f(c),$$

de **raaklijn** (*tangent line*) aan de grafiek van f in c; dit is de rechte door $(c, f(c))$ waarvan de richtingscoëfficiënt gelijk is aan de afgeleide van f in c.

Als $f'(c) = 0$, dan is de raaklijn de horizontale rechte door $\big(c, f(c)\big)$ of $y = f(c)$. Bovendien zal de raaklijn steeds verticaler liggen naarmate $f'(c)$ toeneemt.

Vertrekkende van de afgeleide kunnen we ook de normaal in een punt op de grafiek construeren, dit is namelijk de rechte die loodrecht op de raaklijn staat in dat punt en heeft daarom als richtingscoëfficiënt het tegengestelde van de inverse van die van de raaklijn.

Definitie 9.3 (Normaal)

Zij f een continue functie over een open interval I die afleidbaar is in c in I, dan is de **normaal** (*normal line*) van de grafiek van f in c de rechte met als vergelijking

$$n(x) = \frac{-1}{f'(c)}(x-c) + f(c),$$

mits $f'(c) \neq 0$. Als $f'(c) = 0$ is de normaal de verticale rechte door $\big(c, f(c)\big)$ of $x = c$.

Enkele voorbeelden zullen helpen om de vorige definities te begrijpen.

Voorbeeld 9.1

Beschouw de functie $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$. Bepaal:

1. $f'(1)$,
2. De vergelijking van de raaklijn in $x = 1$,
3. De vergelijking van de normaal in $x = 1$.

Oplossing

1. We berekenen dit onmiddellijk via Definitie 9.1.

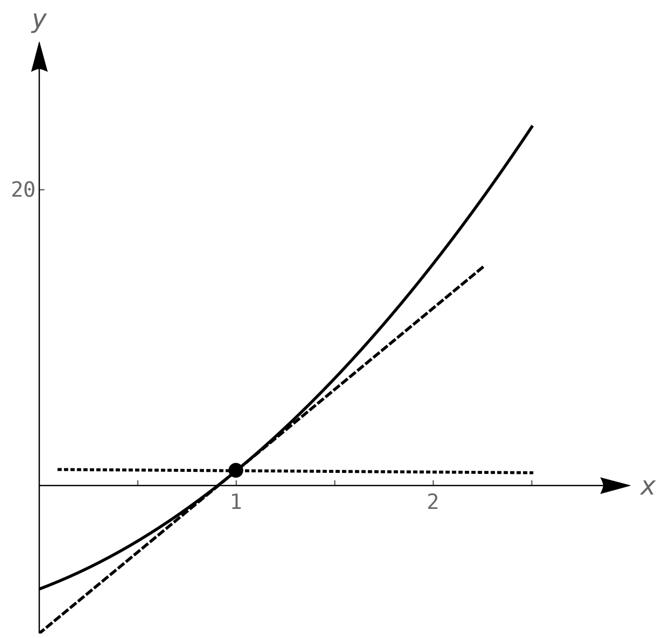
$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3(1+h)^2+5(1+h)-7-(3(1)^2+5(1)-7)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3h^2+11h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(3h+11) = 11 \end{aligned}$$

2. De raaklijn in $x=1$ heeft als richtingscoëfficiënt $f'(1)$ en gaat door het punt $(1, f(1)) = (1,1)$. De raaklijn heeft dus als vergelijking $y = 11(x-1)+1$, of $y = 11x-10$.

3. De normaal in $x=1$ heeft $-1/11$ als richtingscoëfficiënt aangezien $f'(1) = 11$. De vergelijking van de normaal is

$$n(x) = \frac{-1}{11}(x-1)+1.$$

De grafiek van f wordt gegeven in Figuur 9.2, samen met haar raaklijn en normaal in $x=1$. Merk op dat de rechten in deze figuur niet loodrecht op elkaar lijken te staan, maar dat is slechts een gevolg van de gekozen schaal van de figuur.



Figuur 9.2: De grafiek van $f(x) = 3x^2+5x-7$ samen met haar raaklijn (streepjeslijn) en normaal (stippellijn) in $x=1$.

Uit Voorbeeld 9.1 lijkt het alsof we een limiet moeten berekenen voor elk punt c om de afgeleide van f te bepalen. We kunnen dit evenwel ook in één stap doen voor de veranderlijke x. Het proces ziet er nu als volgt uit:

input veranderlijke x $\longrightarrow$ $\boxed{\text{doe iets met } f \text{ en } x}$ $\longrightarrow$ geef de functie $f'(x)$ terug

De output is de afgeleide functie $f'(x)$. Ze neemt een getal c als input en geeft de afgeleide van f in c terug. Dit leidt tot de volgende definitie.

Definitie 9.4 (Afgeleide functie)

Zij f een afleidbare functie over een open interval I, dan noemen we de functie

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

de **afgeleide** (*derivative*) van f.

De volgende notaties zijn equivalent voor de afgeleide van een functie f met als voorschrift $y = f(x)$:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(f) = \frac{d}{dx}(y).$$

Voorbeeld 9.2

Bepaal de afgeleide van de volgende functies.

1. $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$
2. $f(x) = \sin(x)$

Oplossing

1. We passen Definitie 9.4 toe en vinden:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2 + 5(x+h) - 7 - (3x^2+5x-7)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3h^2 + 6xh + 5h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (3h + 6x + 5) \\ &= 6x + 5. \end{aligned}$$

We vinden dus dat $f'(x) = 6x + 5$. Eerder zagen we al dat $f'(1) = 11$, wat bevestigd wordt door deze uitdrukking. We kunnen onze berekening bovendien controleren in Mathematica. Afgeleiden kunnen we in Mathematica berekenen via de ingebouwde functie `D` als volgt.

```
In[11]:= D[3*x^2+5*x-7,x]

Out[11]= 5+6x
```

Het tweede argument van de functie **D** duidt op de veranderlijke waarnaar we willen afleiden.

2. We passen opnieuw Definitie 9.4 toe en verkrijgen:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \\
&\quad \big(\text{Gebruik de formule: } \sin(x+h)=\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)\big) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} && \text{(Sinus van een som.)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)(\cos(h)-1)+\cos(x)\sin(h)}{h} && \text{(Hergroepeer.)} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin(x)(\cos(h)-1)}{h} + \frac{\cos(x)\sin(h)}{h}\right) && \text{(Splits in twee breuken.)} \\
&\quad \left(\text{Gebruik: } \lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=0 \text{ en } \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1\right) \\
&= \sin(x)\cdot 0+\cos(x)\cdot 1 && \text{(Speciale limieten.)} \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

We besluiten dat als $f(x)=\sin(x)$, dat dan $f'(x)=\cos(x)$. Dit resultaat is niet echt verrassend. De sinusfunctie is periodiek, dus de snelheid waarmee f verandert zal ook periodiek zijn.

Het volgende voorbeeld illustreert hoe de afgeleide van een functie niet altijd kan bestaan.

Voorbeeld 9.3

Bepaal de afgeleide van de functie

$$f(x)=|x|=\begin{cases} -x, & \text{als} \quad x<0, \\ x, & \text{als} \quad x\geq 0, \end{cases}$$

waarvan de grafiek wordt gegeven in Figuur 9.3(a).

Oplossing

We moeten $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ berekenen. Vermits f stuksgewijs gedefinieerd is, beschouwen we aparte limieten voor $x<0$, $x>0$ en $x=0$.

1. Als $x<0$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(-x) &= \lim_{h\to 0}\frac{-(x+h)-(-x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(-1) = -1\,.
\end{aligned}$$

2. Als $x>0$ toont een gelijkaardige berekening aan dat $\frac{d}{dx}(x)=1$.

3. We moeten tot slot nog de afgeleide in $x=0$ bepalen. Via de definitie van de afgeleide in een punt vinden we

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\,.$$

Omdat $x = 0$ het punt is waar we overgaan van de ene tak in de grafiek naar de andere, moeten we zowel de linker- als rechterlimiet bepalen. Dit doen we als volgt:

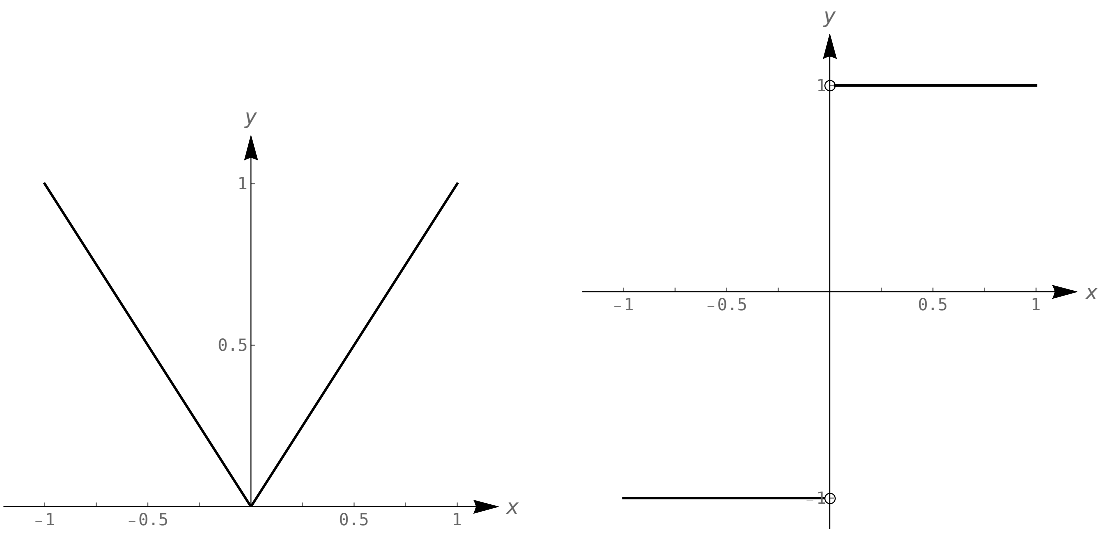
$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{h\to 0\\ <}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ = \quad &\lim_{\substack{h\to 0\\ <}} \frac{-h-0}{h} \\ = \quad &\lim_{\substack{h\to 0\\ <}} -1 \;=\; -1 \end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned} &\lim_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ = \quad &\lim_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{h-0}{h} \\ = \quad &\lim_{\substack{h\to 0\\ >}} 1 \;=\; 1 \end{aligned}$$

De linker- en rechterlimiet zijn duidelijk verschillend. De limiet bestaat dus niet in $x = 0$, zodat f er niet afleidbaar is.

Samengevat hebben we

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{als} \quad x < 0, \\ 1, & \text{als} \quad x > 0. \end{cases}$$

In $x = 0$ bestaat $f'(x)$ niet. Er bevindt zich een discontinuïteit in 0 (Figuur 9.3(b)). Dus $f(x) = |x|$ is overal afleidbaar, behalve in 0.



(a) (b)

Figuur 9.3: De grafiek van $f(x) = |x|$ (a) en haar afgeleide (b).

Het punt waarin de functie niet afleidbaar was in dit voorbeeld, trad op waar we overgingen van het ene deeldomein naar het andere.

Ons volgend voorbeeld toont aan dat dit echter niet altijd voor problemen hoeft te zorgen.

Voorbeeld 9.4

Bepaal de afgeleide van de functie

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

waarvan de grafiek wordt gegeven in Figuur 9.4(a).

Oplossing

Uit Voorbeeld 9.2 weten we dat als $x < \pi/2$, er geldt dat $f'(x) = \cos(x)$. Het is niet zo moeilijk om na te gaan dat als $x > \pi/2$, er geldt dat $f'(x) = 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Tot nu toe hebben we al dus

$$f'(x) = \begin{cases} \cos(x), & x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

We moeten alleen nog $f'(\pi/2)$ bepalen door de linker- en rechterlimiet van het differentiequotiënt in $x = \pi/2$ te bepalen:

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{h\to 0 \\ <}} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} \\ =\ & \lim_{\substack{h\to 0 \\ <}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} \\ =\ & \lim_{\substack{h\to 0 \\ <}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(h)+\sin(h)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} \\ =\ & \lim_{\substack{h\to 0 \\ <}} \frac{1\cdot\cos(h)+\sin(h)\cdot 0-1}{h} \\ =\ & 0\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{h\to 0 \\ >}} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} \\ =\ & \lim_{\substack{h\to 0 \\ >}} \frac{1-1}{h} \\ =\ & \lim_{\substack{h\to 0 \\ >}} \frac{0}{h} \\ =\ & 0\,. \end{aligned}$$

Omdat beide limieten gelijk zijn aan 0 in $x = \pi/2$, bestaat de limiet en dus ook de afgeleide in dit punt. Die is gelijk aan 0. We kunnen f' bijgevolg noteren als

$$f'(x) = \begin{cases} \cos(x), & x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Zie Figuur 9.4(b) voor de grafiek van die functie.

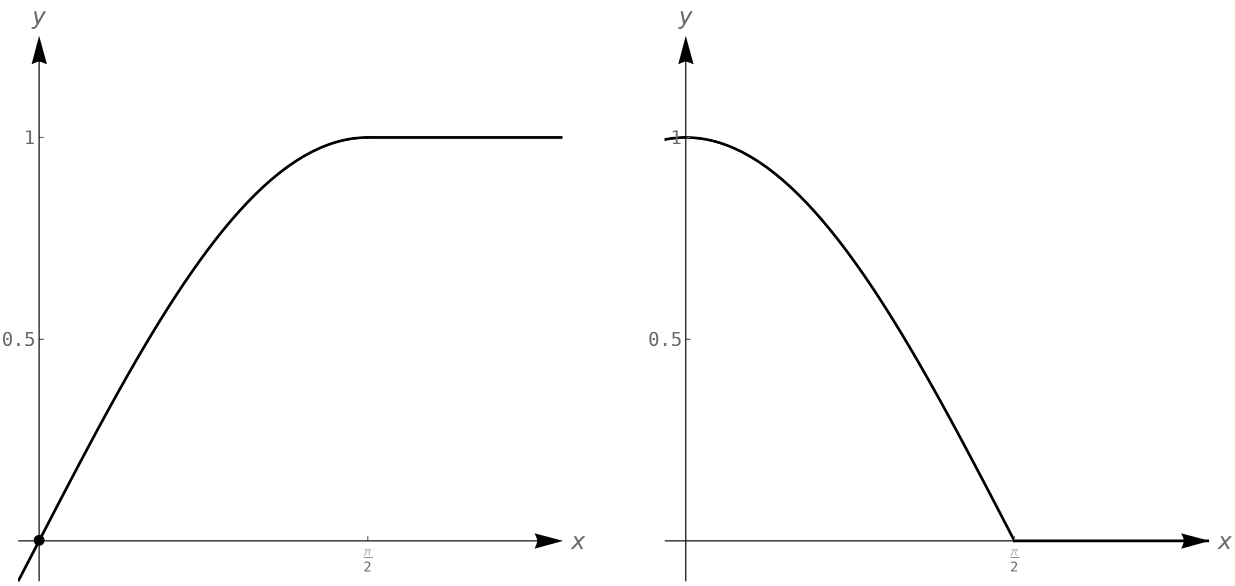
Informeel definieerden we een continue functie in Hoofdstuk 8 als een functie die we kunnen tekenen zonder onze pen op te heffen. Analoog kunnen we een afleidbare functie definiëren als een continue functie waarvan de grafiek geen scherpe hoek maakt, zoals we zagen in Figuur 9.3(a). Anderzijds is de functie f in Voorbeeld 9.4 wel afleidbaar vermits er geen scherpe hoek in voorkomt.

9.1.3 Afleidbaarheid over gesloten intervallen

In Definitie 9.1 veronderstelden we een open interval I. Dat maakte het mogelijk om in elk punt c van I de limiet te bepalen.

In onze Definitie 8.3 van continue functies gebruikten we open intervallen. Later gebruikten we zogenaamde eenzijdige limieten om continuïteit uit te kunnen breiden naar gesloten intervallen. We doen nu hetzelfde voor afleidbaarheid om drie redenen.

Ten eerste is het logisch om te kijken naar algemene intervallen. Zo vonden we in Voorbeeld 9.2 dat als $f(x) = 3x^2+5x-7$, $f'(x) = 6x+5$ en dat deze afgeleide gedefinieerd is voor alle reële getallen, zodat f overal afleidbaar is. Het lijkt dan ook logisch om te zeggen dat f afleidbaar is over bijvoorbeeld



(a) (b)

Figuur 9.4: De grafiek van $f(x)$ uit Voorbeeld 9.4 (a) en haar afgeleide (b).

het gesloten interval $[0,1]$. $f'(x)$ is tenslotte gedefinieerd in $x=0$ en $x=1$. Ten tweede beschouwen we $f(x)=\sqrt{x}$. Het domein van f is $\mathbb{R}^+$. Het is een natuurlijke vraag of f afleidbaar is op haar domein – specifieker: is f afleidbaar in 0? Ten derde zal de definitie van afgeleiden over gesloten intervallen nuttig blijken in het vervolg van dit hoofdstuk.

Hieronder geven we de definitie van afleidbaarheid over een gesloten interval.

Definitie 9.5 (Afleidbaarheid over een gesloten interval)

Zij f een continue functie over $[a,b]$ en afleidbaar over $]a,b[$, en stel dat de eenzijdige limieten

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{en} \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ <}} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$$

bestaan. Dan zeggen we dat f **afleidbaar** (*differentiable*) is over $[a,b]$.

Gegeven Definitie 9.5 en de terminologie voor eenzijdige limieten, zeggen we dat de functie f **rechts afleidbaar** (*right differentiable*) is in a en **links afleidbaar** (*left differentiable*) in b. Bovendien noemen we de eenzijdige limiet

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

de **rechterafgeleide** (*right derivative*) van f in a, terwijl er naar de eenzijdige limiet

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ <}} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$$

verwezen wordt als de **linkerafgeleide** (*left derivative*) van f in b. Nu kunnen we zeggen dat een functie f afleidbaar is in a als en slechts als die links en rechts afleidbaar is in a en de linker- en rechterafgeleide in a gelijk zijn. Een punt $x=a$ waarin de functie een eindige, maar verschillende, linker- en rechterafgeleide heeft, noemen we een **knikpunt** (*cusp*).

Voorbeeld 9.5

Beschouw de functies $f(x) = \sqrt{x}$ en $g(x) = \sqrt{x^3}$. Het domein van beide functies is $\mathbb{R}^+$ en ze zijn duidelijk afleidbaar over $\mathbb{R}_0^+$. Bepaal de afleidbaarheid van beide functies in $x = 0$.

Oplossing

We beschouwen eerst f en nemen de rechterlimiet van het differentiequotiënt:

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} \\
&= \lim_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{\sqrt{h}}{h} \\
&= \lim_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.
\end{aligned}$$

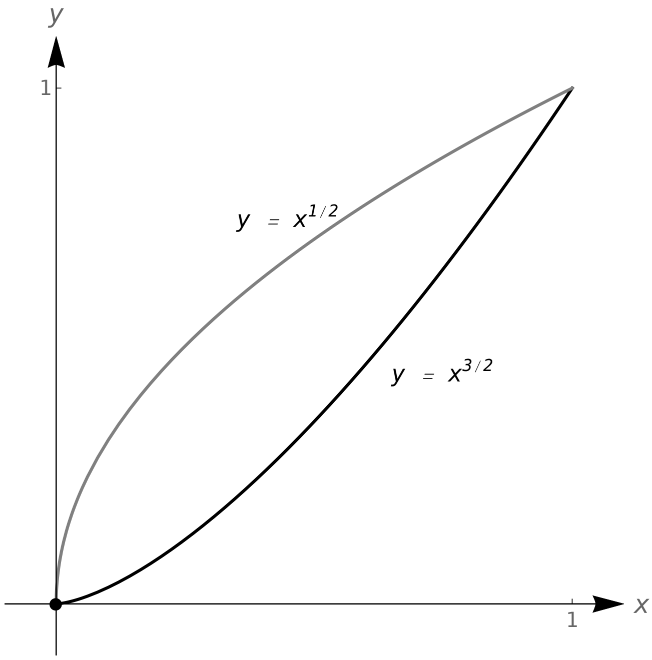
Deze eenzijdige limiet van het differentiequotiënt bestaat niet in $x = 0$ voor f, dus f is afleidbaar over $\mathbb{R}_0^+$ maar niet over $\mathbb{R}^+$.

Beschouw nu de rechterlimiet voor de functie g:

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} &= \lim_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{\sqrt{(0+h)^3}-\sqrt{0}}{h} \\
&= \lim_{\substack{h\to 0\\ >}} \frac{h^{3/2}}{h} \\
&= \lim_{\substack{h\to 0\\ >}} h^{1/2} = 0.
\end{aligned}$$

Omdat deze eenzijdige limiet bestaat in $x = 0$ besluiten we dat g afleidbaar is op haar domein $\mathbb{R}^+$.

Figuur 9.5 geeft de grafiek van beide functies. Merk op hoe $f(x) = \sqrt{x}$ steeds verticaler wordt naarmate x nadert naar 0, wat wil zeggen dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn toeneemt tot positief oneindig. Merk tevens op hoe de helling van de raaklijn aan de grafiek van $g(x) = \sqrt{x^3}$ nadert naar 0 als x nadert naar 0.



Figuur 9.5: De grafieken van $y = x^{1/2}$ en $y = x^{3/2}$.

9.1.4 Betekenis van de afgeleide

We geven twee interpretaties van de afgeleide om te verduidelijken waarom het zo belangrijk is om de afgeleide te bestuderen.

9.1.4.1 Ogenblikkelijke snelheid van verandering

Als f een functie is van x, dan meet $f'(x)$ de ogenblikkelijke snelheid van verandering van f ten opzichte van x. Het is vaak nuttig om te weten welke eenheden de afgeleide functie heeft. Als y een functie is van x, i.e. $y = f(x)$ voor een zekere functie f, en y gemeten wordt in meter en x in seconden, dan zijn de eenheden van $y' = f'$ meter per seconde.

Laten we nog eens terugkomen op de kermisattractie. Als we weten dat op $t = 2$ de snelheid -64 m/s bedraagt, weten we dat de hoogte van de attractie 1 seconde later gedaald zal zijn met ongeveer 64 meter. Echter, vermits de inzittenden aan het versnellen zijn tijdens de vrije val, is dat een onderschatting.

Voorbeeld 9.6

Zij $P(t)$ de wereldbevolking, t minuten na middernacht op 1 januari 2012. Gegeven dat $P(0) = 7028734178$ (`www.prb.org`) en dat $P'(0) = 156$, kunnen we aannemen dat de bevolking 20 dagen later gegroeid zal zijn met ongeveer $28800 \cdot 156 = 4492800$ mensen.

In dit voorbeeld namen we aan dat de veranderingssnelheid constant bleef, dit is

$$f(c+h) \approx f(c) + f'(c) \cdot h.$$

Deze benadering werkt het best wanneer h relatief klein is.

Eén van de meest fundamentele toepassingen van afgeleiden is de studie van beweging. Zij $s(t)$ een positiefunctie, met t de tijd en $s(t)$ de plaats. Dan wordt $s'(t)$ uitgedrukt in meter per seconde en meet het de ogenblikkelijke verandering van de afstand – het meet **snelheid** (*velocity*).

Beschouw nu $v(t)$, een snelheidsfunctie: op tijdstip t geeft $v(t)$ de snelheid van een object terug. De afgeleide van v, $v'(t)$, geeft op zijn beurt de ogenblikkelijke snelheid van verandering terug – de **versnelling** (*acceleration*). Als de snelheid wordt gemeten in meter per seconde en tijd in seconden, dan is de eenheid van versnelling meter per seconde per seconde, of (m/s)/s. We korten dat vaak af als meter per seconde kwadraat, hoewel dat de betekenis van de eenheden doet vervagen.

9.1.4.2 De richtingscoëfficiënt van de raaklijn

Gegeven een functie $y = f(x)$, dan bepaalt het differentiequotiënt

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

een verschil in y-waarden gedeeld door een verschil in x-waarden, het is de richtingscoëfficiënt van de rechte die gaat door de punten $\big(c,f(c)\big)$ en $\big(c+h,f(c+h)\big)$ op de grafiek van f. Naarmate h verkleint, komen die twee punten dichter bij elkaar te liggen en in de limiet bekomen we $f'(c)$. Dit is de richtingscoëfficiënt van een speciale rechte, genaamd de raaklijn, die de grafiek van f slechts één keer snijdt, ter hoogte van $x = c$. Rechten hebben een constante veranderingssnelheid: hun richtingscoëfficiënt. Niet-lineaire functies hebben geen constante veranderingssnelheid, maar we kunnen wel de ogenblikkelijke snelheid bepalen waarmee de functie verandert in $x = c$ door $f'(c)$ te berekenen. We krijgen dus een idee van het gedrag van f door naar de richtingscoëfficiënten van haar raaklijnen te kijken.

Als we $f(c)$ en $f'(c)$ kennen voor een $x = c$, dan wordt de raaklijn in $(c,f(c))$ gegeven door:

$$y = \ell(x) = f'(c)(x-c)+f(c).$$

We kunnen die raaklijn in $x = c$ gebruiken om een waarde van f in de buurt van $x = c$ te schatten. We berekenen $\ell(c+h)$ om $f(c+h)$ te benaderen, onder de veronderstelling dat h klein is. Dit levert het volgende op:

$$y = \ell(c+h) = f'(c)\big((c+h)-c\big)+f(c) = f'(c)h+f(c).$$

9.1.5 Hogere-orde afgeleiden

De afgeleide van een functie f is opnieuw een functie, waarvan we dus de afgeleide kunnen berekenen. De volgende definitie geeft een naam aan dit idee en introduceert de nodige notatie.

Definitie 9.6 (Hogere-orde afgeleiden)

Zij $y = f(x)$ een afleidbare functie over I, dan definiëren we, zolang de bijhorende limieten bestaan, de volgende begrippen.

1. De **tweede afgeleide** (*second derivative*) van f is:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\Big(f'(x)\Big) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = y''.$$

2. De **derde afgeleide** (*third derivative*) van f is:

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}\Big(f''(x)\Big) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3} = y'''.$$

3. De *n*-**de afgeleide** (n^{th} *derivative*) van f is:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}\Big(f^{(n-1)}(x)\Big) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}.$$

In het algemeen gaan we bij het bepalen van de vierde en hogere orde afgeleiden, over op de notatie $f^{(4)}(x)$ en niet $f''''(x)$. We kunnen de tweede afgeleide bovendien ook schrijven als

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{(dx)^2} = \frac{d^2}{(dx)^2}(y)$$

want we nemen twee keer de eerste afgeleide van y (vandaar d^2) naar x (vandaar $(dx)^2 = dx^2$). Hogere-orde afgeleiden kunnen in Mathematica berekend worden via de ingebouwde functie **D**. Zo kunnen we tweede afgeleide van $y = x^2$ bijvoorbeeld berekenen als volgt.

```
In[12]:=  D[x^2,{x,2}]

Out[12]=  2
```

Het tweede argument van de functie **D** is een lijst met de beschouwde veranderlijke en de orde van de afgeleide.

Wat betekenen deze hogere-orde afgeleiden nu eigenlijk? Ons eerste antwoord is

> De tweede afgeleide van een functie f is de snelheid van verandering van de snelheid van verandering van f.

Stel je f voor als een positiefunctie. Dan is f' de snelheid waarmee de positie verandert: de snelheid. De functie f'' beschrijft dan de mate waarin de snelheid verandert, dit is de versnelling.

Op analoge wijze kunnen we de betekenis van hogere-orde afgeleiden achterhalen.

9.1.6 Gladheid

Sommige van de geziene grafieken hadden knikpunten waar de functies niet afleidbaar waren. In de praktijk zullen we ons vaak willen beperken tot functies waarvan de grafieken geen knikpunten bevatten. Dit leidt ons tot de volgende definitie.

Definitie 9.7 (Gladheid)

Een **gladde functie** (*smooth function*) is een functie die oneindig vaak afleidbaar is over een bepaald domein. Een functie noemen we glad over een interval I. Een functie f noemen we bovendien een **stuksgewijs gladde functie** (*piecewise smooth function*) over I als I kan opgesplitst worden in deelintervallen waarover f glad is.

Voorbeeld 9.7

Bepaal of de volgende functies al dan niet glad zijn.

1. $f(x) = x^3$
2. $g(x) = x\,|x|$

Oplossing

1. De eerste afgeleide wordt gegeven door $f'(x) = 3x^2$, de tweede door $f''(x) = 6x$ en de derde door 6, terwijl de vierde en hogere afgeleiden allemaal gelijk zijn aan 0. Al deze afgeleiden zijn continu, dus f is een gladde functie.
2. Voor de duidelijkheid schrijven we de functie

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{als } x \geq 0, \\ -x^2, & \text{als } x < 0\,. \end{cases}$$

De eerste afgeleide is gelijk aan

$$g'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{als } x \geq 0, \\ -2x, & \text{als } x < 0\,, \end{cases}$$

en is overal continu. De tweede afgeleide,

$$g''(x) = \begin{cases} 2, & \text{als } x \geq 0, \\ -2, & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

is echter niet overal continu, want er bevindt zich een sprongdiscontinuïteit ter hoogte van $x = 0$. Bijgevolg is g niet glad.

9.2 Rekenregels voor afgeleiden

Hier zullen we rekenregels bespreken die het mogelijk maken om afgeleiden te berekenen zonder gebruik te maken van de limietdefinitie.

9.2.1 Afgeleiden van algebraïsche en transcendente functies

Beschouw een lineaire functie $y = mx + b$. Wat is y'? Zonder de limiet te berekenen, herkennen we een lineaire functie als een functie met een constante veranderingssnelheid (de richtingscoëfficiënt). De afgeleide y' is exact die veranderingssnelheid. Bij een lineaire functie is dit de constante m, dus $y' = m$.

Laten we op zoek gaan naar de afgeleide van

$$f(x) = ax^2 + bx + c\,.$$

Uit de definitie van de afgeleide (Definitie 9.4) halen we:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)^2+b(x+h)+c-(ax^2+bx+c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{ah^2+2ahx+bh}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(ah+2ax+b) \\ &= 2ax+b. \end{aligned}$$

Dus als bijvoorbeeld $y=6x^2+11x-13$, hebben we meteen $y'=12x+11$.

Op een gelijkaardige manier kunnen we via Definitie 9.4 de afgeleiden van algebraïsche en transcendente functies (Hoofdstukken 4 en 5) bepalen. Voor de constante functie $f(x)=c$ geldt verder

$$\frac{d}{dx}(c)=0\,,$$

met $c\in\mathbb{R}$. Dat bevestigt het logische feit de veranderingssnelheid van dergelijke functies 0 is. Voor andere algebraïsche functies hebben we

- $\dfrac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$, met $n\in\mathbb{Z}$,
- $\dfrac{d}{dx}(x^a)=ax^{a-1}$, met $a\in\mathbb{R}_0$ en $x>0$.

We krijgen dus ook onmiddellijk dat

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

met $x>0$.

Voor wat betreft de exponentiële en logaritmische functies, hebben we

- $\dfrac{d}{dx}(e^x)=e^x$,
- $\dfrac{d}{dx}(a^x)=a^x\ln(a)$, met $a>0$,
- $\dfrac{d}{dx}\big(\ln(x)\big)=\dfrac{1}{x}$,
- $\dfrac{d}{dx}\big(\log_a(x)\big)=\dfrac{1}{x\ln(a)}$, met $a>0, a\neq 1$,

terwijl voor de goniometrische functies geldt:

- $\dfrac{d}{dx}\big(\sin(x)\big)=\cos(x)$,
- $\dfrac{d}{dx}\big(\cos(x)\big)=-\sin(x)$,
- $\dfrac{d}{dx}\big(\tan(x)\big)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}=\sec^2(x)$,
- $\dfrac{d}{dx}\big(\cot(x)\big)=\dfrac{-1}{\sin^2(x)}=-\csc^2(x)$.

Voorbeeld 9.8

Zij $f(x)=x^3$.

1. Bepaal $f'(x)$.
2. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in $x=-1$.
3. Gebruik die raaklijn om $(-1.1)^3$ te schatten.

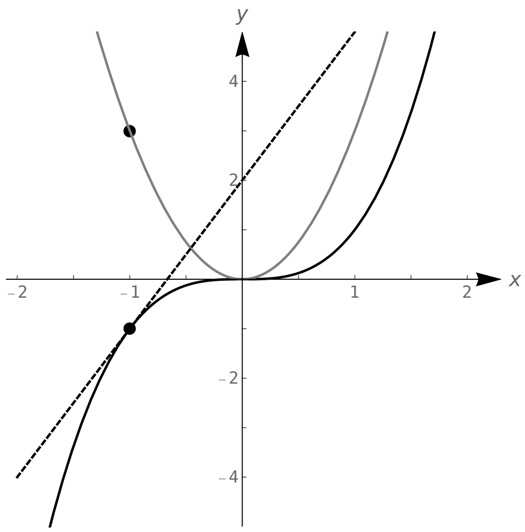
4. Schets f, f' en de gevonden raaklijn in $x = -1$ op dezelfde figuur.

Oplossing

1. Uit de regel voor de afgeleide van een machtsfunctie halen we dat $f'(x) = 3x^2$.
2. Om de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in $x = -1$ te bepalen, hebben we een punt en een richtingscoëfficiënt nodig. Het punt is $(-1, f(-1)) = (-1, -1)$. De richtingscoëfficiënt is $f'(-1) = 3$. De raaklijn heeft dus als vergelijking $y = 3(x-(-1)) + (-1) = 3x + 2$.
3. We gebruiken de raaklijn om $(-1.1)^3$ te schatten, want -1.1 ligt dicht bij -1. Er geldt:

$$(-1.1)^3 \approx 3(-1.1) + 2 = -1.3.$$

   Het exacte antwoord is $(-1.1)^3 = -1.331$.
4. Zie Figuur 9.6.



Figuur 9.6: De grafiek van $f(x) = x^3$, samen met de afgeleide $f'(x) = 3x^2$ (grijs) en de raaklijn in $x = -1$ (gestreept).

9.2.2 Eigenschappen van de afgeleide

Uit de ingevoerde rekenregels kunnen we de afgeleide van $y = x^3$ berekenen, maar we zijn nog niet in staat om die van $y = 2x^3$, $y = x^3 + \sin(x)$ of $y = x^3 \sin(x)$ te bepalen. De volgende stelling zal helpen bij die eerste twee voorbeelden.

Stelling 9.1 (Eigenschappen van de afgeleide)

Zij f en g afleidbare functies over een open interval I en zij c een reëel getal, dan geldt:

1. ***Som-/verschilregel voor afgeleiden***:

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x) \pm g(x)\Big) = \frac{d}{dx}\Big(f(x)\Big) \pm \frac{d}{dx}\Big(g(x)\Big) = f'(x) \pm g'(x). \tag{9.1}$$

2. ***Vermenigvuldiging met een constante***:

$$\frac{d}{dx}\Big(c \cdot f(x)\Big) = c \cdot \frac{d}{dx}\Big(f(x)\Big) = c \cdot f'(x). \tag{9.2}$$

Stelling 9.1 laat ons toe om de afgeleiden van heel wat functies te bepalen. We kunnen ze combineren met de machtsregel om afgeleiden te bepalen van om het even welke veelterm. Herinner je dat we in Voorbeeld 9.2 via de limietdefinitie de afgeleide vonden van $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$. Dit is nu mogelijk zonder expliciet limieten te berekenen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\Big(3x^2 + 5x + 7\Big) &= 3\frac{d}{dx}\Big(x^2\Big) + 5\frac{d}{dx}\Big(x\Big) + \frac{d}{dx}\Big(7\Big) \\ &= 3 \cdot 2x + 5 \cdot 1 + 0 \\ &= 6x + 5. \end{aligned}$$

Voorbeeld 9.9

Bepaal de eerste vier afgeleiden van de volgende functies:

1. $f(x) = 4x^2$
2. $g(x) = \sin(x)$
3. $h(x) = 5e^x$

Oplossing

1. Uit Stelling 9.1 halen we dat $f'(x) = 8x$. Doen we zo verder, dan vinden we

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\Big(8x\Big) = 8; \qquad f'''(x) = 0; \qquad f^{(4)}(x) = 0.$$

   Merk op hoe al de hogere afgeleiden 0 zullen zijn.

2. Grijpen we herhaaldelijk terug naar de lijst van afgeleiden van de elementaire functies, dan krijgen we:

$$g(x) = \cos x; \qquad g'(x) = -\sin x; \qquad g''(x) = -\cos x; \qquad g^{(4)}(x) = \sin x.$$

   Merk op hoe we opnieuw $g(x)$ bekomen.

3. Steunend op de lijst van afgeleiden van elementaire functies, zien we dat

$$h(x) = h'(x) = h''(x) = h^{(4)}(x) = 5e^x.$$

Als we de afgeleide van een product van functies moeten berekenen, kunnen we gebruikmaken van de productregel.

Stelling 9.2 (Productregel)

Zij f en g afleidbare functies over een open interval I. Dan is $f \cdot g$ een afleidbare functie over I en

$$\frac{d}{dx}\Big(f(x)g(x)\Big) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

Voorbeeld 9.10

Bepaal de afgeleide van de volgende functies.

1. $y = 5x^2 \sin(x)$
2. $y = x^3 \ln(x)\cos(x)$

Oplossing

1. We maken expliciet gebruik van de productregel door $f(x) = 5x^2$ en $g(x) = \sin(x)$ te stellen. We vinden $f'(x) = 10x$ en $g'(x) = \cos(x)$. Toepassen van de productregel levert vervolgens

$$\frac{d}{dx}\Big(5x^2 \sin(x)\Big) = 5x^2 \cos(x) + 10x \sin(x).$$

2. We hebben een product van drie functies, zodat

$$y' = 3x^2 \ln(x)\cos(x) + x^3 \frac{1}{x}\cos(x) + x^3 \ln(x)(-\sin(x)).$$

We hebben nu gezien hoe we de afgeleide kunnen berekenen van een som, een verschil en een product van functies. We bekijken ten slotte nog hoe we de afgeleide van een quotiënt kunnen berekenen.

Stelling 9.3 (Quotiëntregel)

Zij f en g afleidbare functies over het open interval I, met $g(x) \neq 0$ over I. Dan is $\frac{f}{g}$ afleidbaar over I en

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Voorbeeld 9.11

Bepaal de afgeleide van de volgende functies.

1. $y = \dfrac{5x^2}{\sin(x)}$
2. $y = \tan(x)$

Oplossing

1. Directe toepassing van de quotiëntregel geeft:

$$y' = \frac{10x\,\sin(x) - 5x^2\,\cos(x)}{\sin^2(x)}.$$

2. We merken op dat $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ en passen daarop de quotiëntregel toe.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\Big(\tan(x)\Big) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)} \\
&= \sec^2(x).
\end{aligned}$$

De afgeleiden van de cotangens-, cosecans- en secansfuncties kunnen berekend worden op basis van de gekende formules voor de cosinus- en sinusfunctie, samen met de quotiëntregel. Je hoeft die dus niet vanbuiten te leren.

De afgeleide berekenen van functies is relatief éénduidig. Meestal zou het duidelijk moeten zijn welke regels toegepast kunnen worden, en in welke volgorde. Sommige functies bieden evenwel meer dan één mogelijkheid; we kunnen verschillende regels gebruiken. Eén van de mooie aspecten van calculus is dat er geen unieke juiste weg bestaat; elke methode die correct toegepast wordt, leidt finaal tot hetzelfde resultaat, de afgeleide.

9.3 De kettingregel

We hebben bijna alle regels voor afleiden besproken die de combinatie van twee (of meer) functies betreffen. De optelling, aftrekking, vermenigvuldiging (ook met constanten) en deling kunnen we opvangen door gebruik te maken van de som-, verschil-, constante vermenigvuldiging, macht-, product- en quotiëntregels. We moeten evenwel nog kijken hoe we een samengestelde functie afleiden. Beschouw hiertoe $f(x) = \cos(x^2)$. We weten voorlopig nog niet hoe we hiervan de afgeleide kunnen berekenen.

De volgende stelling over de **kettingregel** (*chain rule*) maakt dit wel mogelijk.

Stelling 9.4 (De kettingregel)

Zij g een afleidbare functie over een interval I, zij het beeld van g deel van het interval J, en zij f een afleidbare functie over J. Dan is $y = f(g(x))$ afleidbaar over I, en

$$y' = f'(g(x))\,g'(x).$$

Gebruikmakende van de kettingregel kunnen we de veralgemeende machtsregel afleiden.

Stelling 9.5 (Veralgemeende machtsregel)

Zij g een afleidbare functie en zij $n \neq 0$ een geheel getal, dan

$$\frac{d}{dx}\Big(g(x)^n\Big) = n\big(g(x)\big)^{n-1} g'(x).$$

Het kan helpen om de kettingregel te gebruiken met de notatie $\frac{dy}{dx}$ in plaats van de y' notatie. Stel dat $y = f(u)$ een functie is van u, waarbij $u = g(x)$ een functie is van x zoals in Stelling 9.4. Dan kunnen we, via de samenstelling $f \circ g$, y beschouwen als een functie van x, namelijk $y = f(g(x))$. De afgeleide van y ten opzichte van x is dus zinvol; we kunnen spreken over $\frac{dy}{dx}$. Dat leidt tot:

$$\begin{aligned}
y' &= f'(g(x))g'(x) \\
\frac{dy}{dx} &= y'(u)u'(x) && \text{(Want } y = f(u) \text{ en } u = g(x).) \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} && \text{(De afgeleide in breuknotatie noteren.)}
\end{aligned}$$

Het lijkt misschien alsof we de termen du zouden kunnen schrappen, maar dat gaat uiteraard niet, want de notatie $\frac{dy}{du}$ is één symbool. Het is belangrijk om in te zien dat die notatie het gebruik van de kettingregel met meerdere veranderlijken en/of meerdere functies eenvoudiger maakt. Als we bijvoorbeeld drie functies $y = f(u)$, $u = h(v)$ en $v = g(x)$ en hun samenstelling $y = f(h(g(x)))$ beschouwen, dan wordt de afgeleide van y naar x gegeven door

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

of equivalent

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du}\frac{dh(v)}{dv}\frac{dg(x)}{dx}.$$

We bekijken nu enkele voorbeelden om de kettingregel te illustreren.

Voorbeeld 9.12

Bepaal de afgeleide van de volgende functies:

1. $y = \sin(2x)$
2. $y = \ln(4x^3 - 2x^2)$
3. $y = e^{-x^2}$

Oplossing

1. Beschouw $y = \sin(2x)$. We hebben een samenstelling van functies, met $f(u) = \sin(u)$ en $u = g(x) = 2x$. Dus
$$y' = y'(u)u'(x) = \cos(u)2 = 2\cos(2x).$$
2. Beschouw de functie $y = \ln(4x^3 - 2x^2)$ als samenstelling van $f(u) = \ln(u)$ en $u = g(x) = 4x^3 - 2x^2$. Dit leidt tot:
$$y' = \frac{1}{4x^3 - 2x^2}(12x^2 - 4x) = \frac{12x^2 - 4x}{4x^3 - 2x^2} = \frac{4x(3x-1)}{2x(2x^2 - x)} = \frac{2(3x-1)}{2x^2 - x}.$$
3. De functie $y = e^{-x^2}$ is de samenstelling van $f(u) = e^u$ en $u = g(x) = -x^2$. Herinner je dat $f'(x) = e^x$, We besluiten dat
$$y' = e^{-x^2}(-2x) = (-2x)e^{-x^2}.$$

De kettingregel kunnen we natuurlijk toepassen in combinatie met eender welke andere regel die we hebben gezien.

Voorbeeld 9.13

Bepaal de afgeleide van de onderstaande functies.

1. $y = x^5 \sin(2x^3)$
2. $y = \tan^5(6x^3 - 7x)$
3. $y = \dfrac{x\cos(x^{-2}) - \sin^2(e^{4x})}{\ln(x^2 + 5x^4)}$

Oplossing

1. We gebruiken de product- en kettingregel en werken de afgeleide stap voor stap uit.

$$y' = x^5\big(6x^2\cos(2x^3)\big) + 5x^4\big(\sin(2x^3)\big) = 6x^7\cos(2x^3) + 5x^4\sin(2x^3)$$

2. We hebben de functie $g(x) = \tan(6x^3 - 7x)$ binnen de functie $f(x) = x^5$. We passen eerst de veralgemeende machtsregel toe. We werken de afgeleide stap voor stap uit.

$$y' = 5\tan^4(6x^3 - 7x)g'(x)$$

We bepalen vervolgens $g'(x)$. We hebben nogmaals de kettingregel nodig:

$$g'(x) = \sec^2(6x^3 - 7x)(18x^2 - 7).$$

Substitutie van die uitdrukking voor $g'(x)$ in y' levert

$$\begin{aligned} y' &= 5\tan^4(6x^3 - 7x)\sec^2(6x^3 - 7x)(18x^2 - 7) \\ &= (90x^2 - 35)\sec^2(6x^3 - 7x)\tan^4(6x^3 - 7x). \end{aligned}$$

3. Via de quotiënt-, product- en kettingregels bekomen we het volgende antwoord:

$$y' = \frac{\ln(x^2 + 5x^4)\cdot\Big[\big(x(-\sin(x^{-2}))(-2x^{-3}) + 1\cos(x^{-2})\big) - 2\sin(e^{4x})\cos(e^{4x})(4e^{4x})\Big]}{\big(\ln(x^2 + 5x^4)\big)^2} - \frac{\Big(x\cos(x^{-2}) - \sin^2(e^{4x})\Big)\cdot\frac{2x + 20x^3}{x^2 + 5x^4}}{\big(\ln(x^2 + 5x^4)\big)^2}.$$

Het vorige voorbeeld illustreert dat afgeleiden systematisch berekend kunnen worden, ongeacht de complexiteit van de gegeven functie. Cruciaal is evenwel om het gegeven op te splitsen in kleinere, hanteerbare deelproblemen. Wanneer we bijvoorbeeld de product- en kettingregel samen gebruiken, beschouwen we eerst het eerste deel van de productregel: $f(x)g'(x)$. We schrijven $f(x)$ en zoeken $g'(x)$. Daarna focussen we op de term $f'(x)g(x)$. Hetzelfde geldt voor de quotiëntregel.

De kettingregel heeft ook een theoretische waarde. We kunnen hem gebruiken om nog niet gekende afgeleiden te bepalen.

Voorbeeld 9.14

Gebruik de kettingregel om de afgeleide van $y = 2^x$ te bepalen.

Oplossing

We weten van slechts één exponentiële functie hoe de afgeleide te berekenen: $y = e^x$. We zullen de afgeleide van $y = 2^x$ berekenen door 2 te schrijven in termen van e. Herinner je dat e^x en $\ln(x)$ inverse functies zijn, zodat

$$2 = e^{\ln(2)} \quad \text{en dus} \quad y = 2^x = \left(e^{\ln(2)}\right)^x = e^{x(\ln(2))}.$$

Dit is niets anders dan $y = f(g(x))$, met $f(u) = e^u$ en $g(x) = x(\ln(2))$. Aangezien $f'(u) = e^u$ en $g'(x) = \ln(2)$ levert het toepassen van de kettingregel

$$y' = e^{x(\ln(2))}\ln(2).$$

Merk op dat de factor $e^{x(\ln(2))}$ in het rechterlid gelijk is aan 2^x, de oorspronkelijke functie. De afgeleide bevat dus de originele functie. We hebben

$$y' = 2^x \ln(2).$$

We kunnen de afleiding uit Voorbeeld 9.14 veralgemenen tot een willekeurig grondtal a, met $a > 0$ en $a \neq 1$. We dienen daarvoor enkel elke “2” te vervangen door “a”. Op die manier laat de kettingregel, gecombineerd met de gekende afgeleide van e^x, ons toe om de afgeleiden van alle exponentiële functies te berekenen.

Zodoende, zij $f(x) = a^x$, voor een zekere $a > 0, a \neq 1$, dan is f overal afleidbaar en

$$f'(x) = \ln(a)a^x.$$

Analoog kan men aantonen dat

$$\frac{d}{dx}\left(\log_a(x)\right) = \frac{1}{\ln(a)}\frac{1}{x}.$$

In de volgende sectie zullen we de kettingregel gebruiken om een andere manier van afleiden te introduceren. Er zijn veel krommen die we kunnen tekenen in het vlak, maar die de test met de verticale rechte niet doorstaan en derhalve niet kunnen geschreven worden met behulp van een functie. In Sectie 4.4 hebben we onder andere de vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ bestudeerd. We zouden natuurlijk nog steeds geïnteresseerd kunnen zijn in het vinden van de richtingscoëfficiënt van de raaklijnen aan deze cirkel in een bepaald punt. De volgende sectie leert ons hoe we $\frac{dy}{dx}$ kunnen bepalen zonder dat we een expliciete uitdrukking $y = f(x)$ hebben. Hoewel we het in dit geval wel zouden kunnen, is het in veel andere situaties niet mogelijk om het functievoorschrift naar y op te lossen. In die omstandigheden is impliciet afleiden onmisbaar.

9.4 Impliciet afleiden

9.4.1 Eerste afgeleide

Tot nu toe werd y steeds expliciet gegeven als functie van x. Soms is het verband tussen y en x echter niet expliciet, maar impliciet. We zouden bijvoorbeeld kunnen hebben dat $x^2 - y = 4$. Kunnen we nog steeds y' bepalen? In dit geval zeker: we lossen op naar y om te krijgen dat $y = x^2 - 4$ en leiden daarna af om $y' = 2x$ te vinden. Soms is het impliciet verband tussen x en y echter ingewikkelder. Stel dat $\sin(y) + y^3 = 6 - x^3$ gegeven is. Dan is het onmogelijk om y schrijven in termen van elementaire functies. Het merkwaardige is evenwel dat we nog steeds y' kunnen bepalen via impliciet afleiden.

Impliciet afleiden is een techniek, gebaseerd op de kettingregel, die gebruikt wordt om een afgeleide te vinden wanneer het verband tussen de veranderlijken impliciet in plaats van expliciet gegeven is.

Zij f en g functies van x. Dan geldt er volgens de kettingregel dat

$$\frac{d}{dx}\Big(f(g(x))\Big) = f'(g(x))\,g'(x).$$

Stel nu dat $y = g(x)$. Dan kunnen we de bovenstaande uitdrukking herschrijven als

$$\frac{d}{dx}\Big(f(y)\Big) = f'(y)y', \quad \text{of} \quad \frac{d}{dx}\Big(f(y)\Big) = f'(y)\frac{dy}{dx}. \tag{9.3}$$

We zien dus dat we y' kunnen bepalen, zelfs wanneer we geen expliciet verband hebben tussen y en x.

Voorbeeld 9.15

Beschouw

$$\sin(y) + y^3 = 6 - x^3\,.$$

Bepaal dan y' en de vergelijking van de raaklijn in het punt $\left(\sqrt[3]{6}, 0\right)$.

Oplossing

We nemen eerst de afgeleide van beide leden, en stellen ze gelijk. Er geldt:

$$\frac{d}{dx}\Big(\sin(y) + y^3\Big) = \frac{d}{dx}\Big(6 - x^3\Big).$$

In het rechterlid vinden we makkelijk $-3x^2$.

Het linkerlid is iets lastiger. We berekenen de afgeleide term per term. Dankzij Vergelijking (9.3) zien we dat

$$\frac{d}{dx}\Big(\sin(y)\Big) = \cos(y)\,y'.$$

Analoog krijgen we voor de term y^3:

$$\frac{d}{dx}\Big(y^3\Big) = \frac{d}{dx}\Big((y)^3\Big) = 3(y)^2\,y'.$$

Op een gelijkaardige manier vinden we dus dat de afgeleide van y^3 gelijk is aan $3y^2y'$. Alles tezamen vinden we

$$\cos(y)y' + 3y^2y' = -3x^2,$$

wat we kunnen oplossen naar y':

$$\begin{aligned} & \cos(y)y' + 3y^2y' = -3x^2 \\ \Leftrightarrow\quad & \big(\cos(y) + 3y^2\big)y' = -3x^2 \\ \Leftrightarrow\quad & y' = \frac{-3x^2}{\cos(y) + 3y^2}. \end{aligned}$$

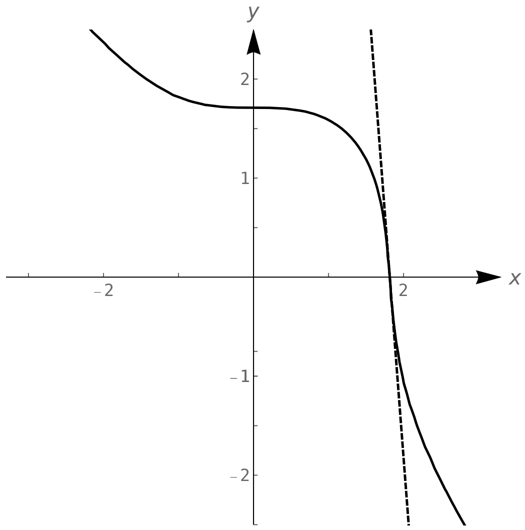
We kunnen nu de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt $\left(\sqrt[3]{6}, 0\right)$ bepalen door dit punt in te vullen in de laatste uitdrukking. Dus in het punt $\left(\sqrt[3]{6}, 0\right)$ is de richtingscoëfficiënt gelijk aan

$$y' = \frac{-3(\sqrt[3]{6})^2}{\cos(0) + 3 \cdot 0^2} = \frac{-3\sqrt[3]{36}}{1} \approx -9.91.$$

Bijgevolg is de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van de impliciet gedefinieerde functie $\sin(y) + y^3 = 6 - x^3$ in het punt $\left(\sqrt[3]{6}, 0\right)$ gelijk aan

$$y = -3\sqrt[3]{36}(x - \sqrt[3]{6}) + 0 \approx -9.91x + 18.$$

De kromme en deze raaklijn worden weergegeven in Figuur 9.7.



Figuur 9.7: De grafiek van de functie $\sin(y) + y^3 = 6 - x^3$ en haar raaklijn (streepjeslijn) in het punt $(\sqrt[3]{6}, 0)$.

Uit dit laatste voorbeeld blijkt een algemene methode om impliciet af te leiden. Neem aan dat y een functie is van x.

1. Neem de afgeleide van elke term in de vergelijking. Behandel de termen met x zoals anders. Bij het bepalen van de afgeleide van de termen met y gelden de gebruikelijke regels, behalve dat, wegens de kettingregel, we elke term nog eens met y' moeten vermenigvuldigen.
2. Verzamel alle termen met y' in één lid van de gelijkheid en de overige termen in het andere lid.
3. Los op naar y'.

Voorbeeld 9.16

Gegeven de impliciet gedefinieerde functie

$$\sin\left(x^2y^2\right) + y^3 = x + y,$$

bepaal dan y'.

Oplossing

Leiden we term per term af, dan stoten we op de grootste moeilijkheid in de eerste term. We hebben zowel de ketting- als productregel nodig:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\Big(\sin\big(x^2y^2\big)\Big) &= \cos\big(x^2y^2\big)\,\frac{d}{dx}\Big(x^2y^2\Big)\\
&= \cos\big(x^2y^2\big)\,\big(x^2(2yy') + 2xy^2\big)\\
&= 2(x^2yy' + xy^2)\cos\big(x^2y^2\big).
\end{aligned}$$

We laten de berekening van de afgeleiden van de andere termen over aan de lezer. Na afleiden van beide leden, hebben we

$$2(x^2yy' + xy^2)\cos(x^2y^2) + 3y^2y' = 1 + y'.$$

We werken nu eerst het product in het linkerlid uit:

$$2x^2y\cos(x^2y^2)y' + 2xy^2\cos(x^2y^2) + 3y^2y' = 1 + y'.$$

We zonderen vervolgens alle termen met y' af in het linkerlid:

$$2x^2y\cos(x^2y^2)y' + 3y^2y' - y' = 1 - 2xy^2\cos(x^2y^2).$$

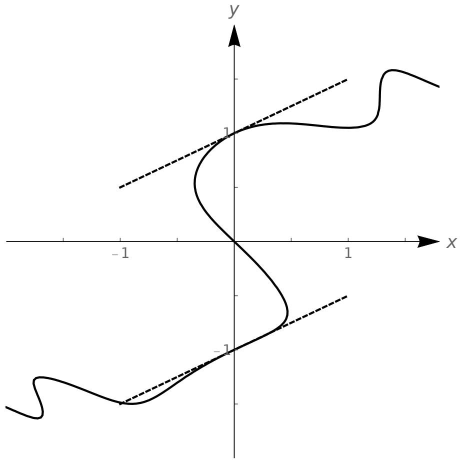
Finaal lossen we op naar y' en krijgen

$$y' = \frac{1 - 2xy^2\cos(x^2y^2)}{2x^2y\cos(x^2y^2) + 3y^2 - 1}.$$

De grafiek van de impliciete functie wordt gegeven in Figuur 9.8. Het is niet zo moeilijk om na te gaan dat de punten $(0,1)$ en $(0,-1)$ allebei op de grafiek liggen. We kunnen de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen in elk van die punten vinden door ze in te vullen in onze uitdrukking voor y':

- in $(0,1)$ is de richtingscoëfficiënt $1/2$;
- in $(0,-1)$ is de richtingscoëfficiënt $1/2$.

De raaklijnen kan je eveneens zien in Figuur 9.8.



Figuur 9.8: De grafiek van de impliciet gedefinieerde functie $\sin\left(x^2y^2\right)+y^3=x+y$ en haar raaklijnen in $(0,1)$ en $(0,-1)$.

We kunnen gebruikmaken van Mathematica om ons antwoord te controleren. We moeten alleen goed opletten om expliciet te vermelden dat y afhangt van x. Dit kan als volgt:

```
In[13]:= D[Sin[x^2 y[x]^2] + y[x]^3 == x + y[x],x]

Out[13]= 3 y[x]^2 y′[x]+Cos[x^2 y[x]^2] (2 x y[x]^2+2 x^2 y[x] y′[x])==1+y′[x]
```

Impliciete functies zijn in het algemeen moeilijker te begrijpen dan expliciete functies. Voor die eerste hebben we, gegeven een x-waarde, een expliciete formule om de bijhorende y-waarde te vinden. Bij impliciete functies moet men daarentegen tegelijkertijd x- en y-waarden vinden die aan de vergelijking voldoen. Het is veel gemakkelijker om te weten of een bepaald punt aan de vergelijking voldoet dan om zo'n punt te vinden.

9.4.2 Hogere-orde afgeleiden

We kunnen impliciet afleiden ook gebruiken om hogere-orde afgeleiden te bepalen. We bepalen hiervoor eerst $\frac{dy}{dx}$ en nemen daarvan de afgeleide naar x. We illustreren dit in een voorbeeld.

Voorbeeld 9.17

Gegeven $x^2+y^2=1$, bepaal y''.

Oplossing

Afleiden levert $2x+2yy'=0$. Oplossen naar y' geeft vervolgens:

$$y'=\frac{-x}{y}.$$

Om y'' te bepalen, leiden we de laatste uitdrukking nogmaals impliciet af:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dx}(y') \\ &= \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right) && \text{(Gebruik de quotiëntregel.)} \end{aligned}$$

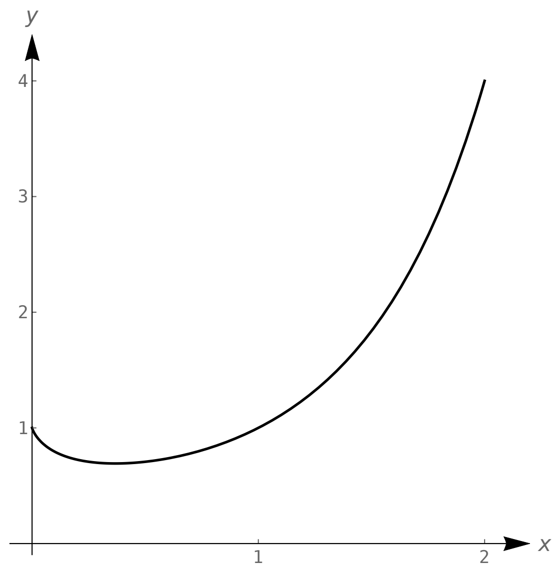
$$= -\frac{y \cdot 1 - x(y')}{y^2}$$

Finaal vervangen we y' door $-x/y$:

$$\begin{aligned} &= -\frac{y - x(-x/y)}{y^2} \\ &= -\frac{y + x^2/y}{y^2}. \end{aligned}$$

9.4.3 Logaritmisch afleiden

Beschouw de functie $y = x^x$, waarvan de grafiek gegeven wordt in Figuur 9.9. Ze is gedefinieerd voor $x > 0$ en we zijn geïnteresseerd in de vergelijkingen van de raaklijnen en normalen van de grafiek. Hoe bepalen we de afgeleide?



Figuur 9.9: De grafiek van $y = x^x$.

De beschouwde functie is geen machtsfunctie, want ze heeft als macht x, geen constante. Het is ook geen exponentiële functie, want ze heeft als grondtal x, geen constante. Een afleidingstechniek, bekend als **logaritmisch afleiden** (*logarithmic differentiation*) kan hier van pas komen. We nemen hiertoe het natuurlijk logaritme van beide leden van de vergelijking $y = f(x)$ en gebruiken dan impliciet afleiden om y' te bepalen.

Voorbeeld 9.18

Gegeven $y = x^x$, gebruik logaritmisch afleiden om y' te bepalen.

Oplossing

We nemen eerst het natuurlijk logaritme van beide leden en gebruiken dan impliciet afleiden.

$$\begin{array}{rrcll}
 & y & = & x^x & \\
\Leftrightarrow & \ln(y) & = & \ln(x^x) & \\
\Leftrightarrow & \ln(y) & = & x\ln(x) & \text{(Eigenschap van de logaritme.)} \\
\Leftrightarrow & \dfrac{d}{dx}\Big(\ln(y)\Big) & = & \dfrac{d}{dx}\Big(x\ln(x)\Big) & \text{(Impliciet afleiden.)} \\
\Leftrightarrow & \dfrac{y'}{y} & = & \ln(x) + x\dfrac{1}{x} & \\
\Leftrightarrow & \dfrac{y'}{y} & = & \ln(x) + 1 & \\
\Leftrightarrow & y' & = & y\big(\ln(x)+1\big) & (y = x^x\,.) \\
\Leftrightarrow & y' & = & x^x\big(\ln(x)+1\big). &
\end{array}$$

9.5 Afleiden van inverse functies

Herinner je uit Sectie 3.4 dat een functie $y = f(x)$ injectief is als ze voldoet aan de test met een horizontale rechte: voor elke twee verschillende x-waarden x_1 en x_2 hebben we nooit dat $f(x_1) = f(x_2)$. In sommige gevallen kunnen we het domein van f beperken tot een deel waarover f injectief is.

Herinner je verder dat injectieve functies inverteerbaar zijn. Met andere woorden, als f injectief is, heeft ze een inverse functie, genoteerd f^{-1}, zodanig dat als $f(a) = b$, dan $f^{-1}(b) = a$. Het domein van f^{-1} is het bereik van f en omgekeerd. Hier stellen we $g = f^{-1}$ en begrijpen we g als een functie van x.

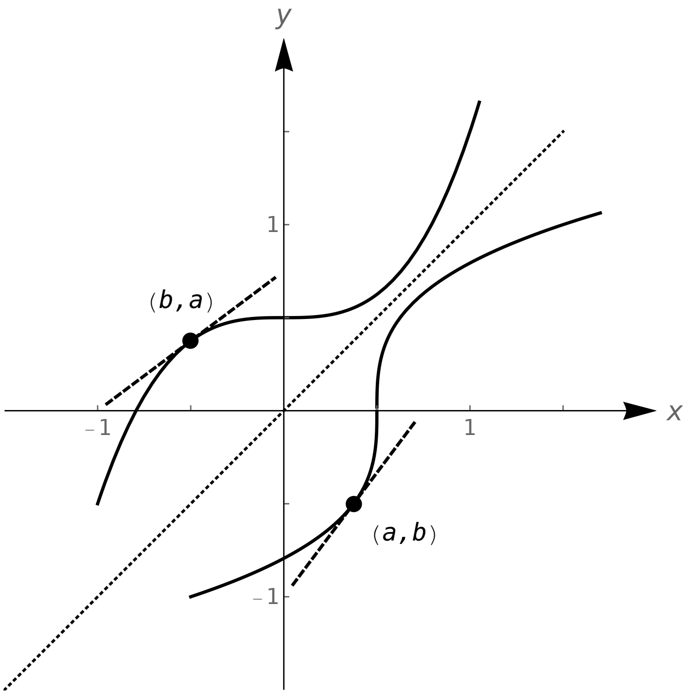
Als het punt (a, b) op de grafiek van f ligt, ligt het punt (b, a) op de grafiek van g, dus de grafiek van g is het spiegelbeeld van die van f ten opzichte van de rechte $y = x$. Deze vaststelling laat ons toe om onze kennis over f gemakkelijk over te brengen naar g.

Beschouw bijvoorbeeld Figuur 9.10 waar de raaklijn aan de grafiek van f in het punt (a, b) is getekend. Die rechte heeft als richtingscoëfficiënt $f'(a)$. Door ze te spiegelen ten opzichte van $y = x$, zien we dat de raaklijn van g in het punt (b, a) als richtingscoëfficiënt $\frac{1}{f'(a)}$ moet hebben, dus $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

We kunnen dit verband ook analytisch achterhalen. Zij daarvoor $y = g(x)$, met opnieuw $g = f^{-1}$ en laat ons y' bepalen. Vermits $y = g(x)$ weten we dat $f(y) = x$. We berekenen nu (impliciet) de afgeleide van beide leden van die laatste gelijkheid:

$$\begin{array}{rrcl}
 & \dfrac{d}{dx}\Big(f(y)\Big) & = & \dfrac{d}{dx}\Big(x\Big) \\
\Leftrightarrow & f'(y)\,y' & = & 1 \\
\Leftrightarrow & y' & = & \dfrac{1}{f'(y)} \\
\Leftrightarrow & y' & = & \dfrac{1}{f'(g(x))}.
\end{array}$$

Dit leidt tot de volgende stelling.



Figuur 9.10: Raaklijnen van f en f^{-1}.

Stelling 9.6 (Afgeleide van een inverse functie)

Zij f een afleidbare en injectieve functie over een open interval I, met $f'(x) \neq 0$ voor alle x in I, zij J het beeld van f over I, g de inverse functie van f en zij $f(a) = b$ voor een zekere a in I. Dan is g een afleidbare functie over J, en in het bijzonder,

$$1.\ \left(f^{-1}\right)'(b) = g'(b) = \frac{1}{f'(a)} \qquad \text{en} \qquad 2.\ \left(f^{-1}\right)'(x) = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

De gevolgen van Stelling 9.6 zijn niet triviaal en de notatie ziet er op het eerste gezicht verwarrend uit. Een aantal voorbeelden zouden tot een beter begrip moeten leiden.

In het volgende voorbeeld passen we Stelling 9.6 toe op de boogsinusfunctie.

Voorbeeld 9.19

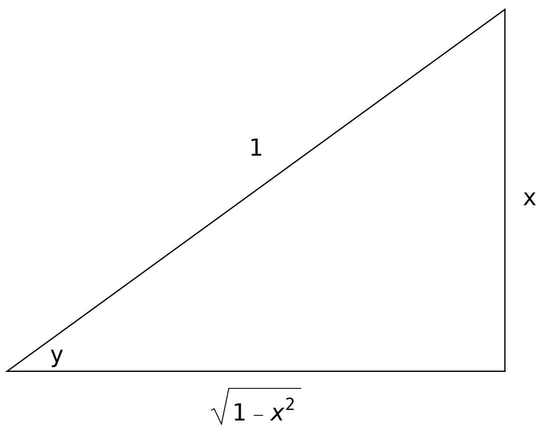
Zij $y = \arcsin(x)$. Bepaal y'.

Oplossing

In overeenstemming met de notatie in Stelling 9.6 stellen we $g(x) = \arcsin(x)$ en $f(x) = \sin(x)$. Bijgevolg is $f'(x) = \cos(x)$. Toepassen van de stelling levert

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{f'(g(x))} \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}. \end{aligned}$$

Die laatste uitdrukking is niet bepaald nuttig. Het helpt om de rechthoekige driehoek in Figuur 9.11 te beschouwen, waarbij we aannemen dat $x > 0$.



Figuur 9.11: Een rechthoekige driehoek gedefinieerd door $y = \arcsin(x/1)$ waarvan de lengte van de derde zijde gevonden kan worden via de stelling van Pythagoras.

Merk op dat we de sinusfunctie kunnen beschouwen als een functie die een hoek afbeeldt op de verhouding tussen de zijden van een rechthoekige driehoek: de overstaande zijde en de schuine zijde. Dat betekent dat de boogsinusfunctie als input een verhouding van zijden neemt en een hoek teruggeeft. De vergelijking $y = \arcsin(x)$ mogen we schrijven als $y = \arcsin(x/1)$, waarbij we ons een rechthoekige driehoek voorstellen waarvan de schuine zijde lengte 1 heeft en de zijde tegenover de hoek met grootte y lengte x. De derde zijde heeft bijgevolg lengte $\sqrt{1-x^2}$.

Er geldt dus dat

$$\cos(\arcsin(x)) = \cos(y) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2},$$

wat resulteert in

$$\frac{d}{dx}\big(\arcsin(x)\big) = g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Merk op dat de input x van de boogsinusfunctie een verhouding is van de zijde van een rechthoekige driehoek tot zijn schuine zijde; de absolute waarde van die verhouding is nooit groter dan 1. Het argument van de vierkantswortel zal dus nooit negatief zijn.

Analoog als in Voorbeeld 9.19 kunnen we de afgeleide bepalen van alle inverse goniometrische functies.

De inverse goniometrische functies zijn afleidbaar over alle delen van hun domein (zie Tabel 5.5) en hun afgeleiden zijn de volgende:

- $\frac{d}{dx}\big(\arcsin(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $\frac{d}{dx}\big(\arctan(x)\big) = \frac{1}{1+x^2}$,
- $\frac{d}{dx}\big(\arccos(x)\big) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $\frac{d}{dx}\big(\text{arccot}(x)\big) = -\frac{1}{1+x^2}$.

In Sectie 9.2 vermeldden we zonder bewijs of uitleg dat $\frac{d}{dx}\big(\ln(x)\big) = \frac{1}{x}$. We kunnen dat nu aantonen met Stelling 9.6.

Voorbeeld 9.20

Bereken

$$\frac{d}{dx}\big(\ln(x)\big).$$

Oplossing

Beschouw $y = \ln(x)$ als de inverse van $y = e^x$. Stel daarvoor $f(x) = e^x$ en $g(x) = \ln(x)$. We willen $g'(x)$ bepalen. Toepassing van Stelling 9.6 levert direct:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{f'(g(x))} \\ &= \frac{1}{e^{\ln(x)}} \\ &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

9.6 De regel van l'Hôpital

In Hoofdstuk 8 werden we geconfronteerd met de onbepaalde vorm $0/0$. Als $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ en $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ besluiten we niet dat $\lim_{x\to c} f(x)/g(x)$ gelijk is aan $0/0$, maar we gebruiken $0/0$ eerder als notatie om aan te geven dat zowel de teller als noemer naar 0 naderen.

Er bestaan ook andere onbepaalde vormen: ∞/∞, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞ en ∞^0. Net zoals 0/0 niet betekent dat we 0 door 0 delen, wil de uitdrukking ∞/∞ niet zeggen dat we oneindig door oneindig delen. Die uitdrukking staat enkel voor een hoeveelheid die onbegrensd groeit en gedeeld wordt door een andere hoeveelheid die onbegrensd groeit. We kunnen niet zomaar concluderen welke waarde, als die al bestaat, bereikt wordt in de limiet.

9.6.1 Onbepaalde vormen 0/0 en ∞/∞

We bespreken nu de regel van l'Hôpital. Dat is een methode om limieten te berekenen die de onbepaalde vormen 0/0 en ∞/∞ opleveren. We zullen daarnaast zien hoe we andere onbepaalde uitdrukkingen via algebraïsche manipulatie kunnen omzetten in één van die vormen, waarna we dan de regel kunnen toepassen.

Stelling 9.7 (De regel van l'Hôpital voor 0/0)

Zij f en g afleidbare functies over een open interval I dat c bevat en geldt er dat $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ en $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, terwijl $g'(x) \neq 0$ over I (uitz. c), dan mogen we schrijven dat

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

We illustreren het gebruik van de regel van l'Hôpital (H) in de volgende voorbeelden.

Voorbeeld 9.21

Bereken de volgende limieten.

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$
2. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{1-x}$
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos(x)}$

Oplossing

1. We hebben reeds aangetoond dat de gezochte limiet gelijk is aan 1 in Voorbeeld 8.6 met behulp van de insluitstelling. We gebruiken nu de regel van l'Hôpital om het nut ervan te illustreren.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$
2. $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{1-x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2}(x+3)^{-1/2}}{-1} = -\frac{1}{4}.$$
3. $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos(x)} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin(x)}.$$
Die laatste limiet leidt opnieuw tot de onbepaalde vorm 0/0. We gebruiken dus nogmaals de regel van l'Hôpital
$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin(x)} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2}{\cos(x)} = 2,$$
zodat $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos(x)} = 2$.

Merk op dat in elke stap waar we de regel van l'Hôpital hebben toegepast, die ook nodig was en gebruikt mocht worden, de initiële limiet de onbepaalde vorm $0/0$ terug gaf. Had de limiet bijvoorbeeld 1/2 opgeleverd, dan mochten we de regel van l'Hôpital niet gebruiken.

De volgende stelling breidt onze eerste versie van de regel van l'Hôpital uit op twee manieren: naar de onbepaalde vorm ∞/∞ en limieten waarvoor x nadert naar $\pm\infty$.

Stelling 9.8 (De regel van l'Hôpital voor ∞/∞)

1. *Zij f en g afleidbare functies over een open interval I dat a bevat en geldt er dat $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ en $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, terwijl $g'(x) \neq 0$ over I (uitz. a), dan*
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
2. *Zij f en g afleidbare functies over een open interval $]a,+\infty[$ voor een zekere a, met $g'(x) \neq 0$ over $]a,+\infty[$ en waarvoor $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x)$ ofwel "0/0" ofwel "∞/∞" oplevert. Dan is*
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
Analoog wanneer x nadert naar $-\infty$.

Voorbeeld 9.22

Bereken de volgende limieten.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-100x+2}{4x^2+5x-1000}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$

Oplossing

1. We kunnen deze limiet op zich berekenen via Stelling 8.8, maar we passen als alternatief de regel van l'Hôpital toe.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-100x+2}{4x^2+5x-1000} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{6x-100}{8x+5} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

2. We vinden onmiddellijk dat

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty.$$

Herinner je dat dit betekent dat de limiet niet bestaat; als x nadert naar $+\infty$, groeit de uitdrukking e^x/x^3 onbegrensd. We concluderen hieruit dat e^x sneller stijgt dan x^3 als x toeneemt.

9.6.2 Onbepaalde vormen $0\cdot\infty$ en $\infty-\infty$

De regel van l'Hôpital kan in wezen alleen gebruikt worden bij rationale functies. Echter, wanneer we een onbepaalde vorm $0\cdot\infty$ of $\infty-\infty$ tegenkomen, kunnen we de limiet soms danig herschrijven dat we toch de regel van l'Hôpital kunnen toepassen. We lichten het algemene idee toe in het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 9.23

Bereken de volgende limieten.

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(x\,e^{1/x}\right)$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \left(x\,e^{1/x}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln(x+1)-\ln(x)\right)$

Oplossing

1. Als $x \underset{>}{\to} 0$, dan $x\to 0$ en $e^{1/x}\to e^{+\infty}\to+\infty$. We hebben dus de onbepaalde vorm $0\cdot\infty$. We herschrijven de uitdrukking $x\cdot e^{1/x}$ als

$$\frac{e^{1/x}}{1/x}.$$

Als nu $x \underset{>}{\to} 0$, krijgen we de onbepaalde vorm ∞/∞ waarop we de regel van l'Hôpital kunnen toepassen.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(x\,e^{1/x}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{e^{1/x}}{1/x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{(-1/x^2)e^{1/x}}{-1/x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} e^{1/x} = +\infty.$$

We besluiten dat $e^{1/x}$ sneller stijgt dan dat x daalt tot nul, wat wil zeggen dat het product onbegrensd toeneemt.

2. Als $x \underset{<}{\to} 0$, dan $x \to 0$ en $e^{1/x} \to e^{-\infty} \to 0$. De limiet levert $0 \cdot 0$, wat geen onbepaalde vorm is. We besluiten dat
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left(x\, e^{1/x} \right) = 0.$$

3. Deze limiet levert de onbepaalde vorm $\infty - \infty$. Dankzij de rekenregels voor logaritmes kunnen we de limiet schrijven als
$$\lim_{x \to +\infty} \big(\ln(x+1) - \ln(x) \big) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x} \right).$$
Als $x \to +\infty$, nadert het argument van de ln naar ∞/∞, maar
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(1+1/x)}{x} = 1.$$
Aangezien $x \to +\infty \Rightarrow \frac{x+1}{x} \to 1$, volgt er dat $x \to +\infty$ impliceert dat
$$\ln\left(\frac{x+1}{x} \right) \to \ln(1) = 0.$$
Dus
$$\lim_{x \to +\infty} \big(\ln(x+1) - \ln(x) \big) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x} \right) = 0.$$
Vermits deze limiet gelijk is aan 0, is er voor grote x nauwelijks verschil tussen $\ln(x+1)$ en $\ln(x)$; hun verschil is essentieel 0.

9.6.3 Onbepaalde vormen 0^0, 1^∞ en ∞^0

Wanneer je een onbepaalde vorm tegenkomt die een macht bevat, helpt het vaak om de natuurlijke logaritme te gebruiken. We steunen daarbij op de eigenschap dat als $\lim_{x \to c} \ln\big(f(x)\big) = L$, dan
$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} e^{\ln(f(x))} = e^L.$$

Voorbeeld 9.24

Bereken de volgende limieten.

1. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$

2. $\displaystyle \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^x$

Oplossing

1. Deze limiet is equivalent met een speciale limiet uit Stelling 8.4. Merk op dat de exponent nadert naar $+\infty$, terwijl het grondtal nadert naar 1. Dat leidt tot de onbepaalde vorm $1^{+\infty}$.

Stel nu $f(x) = (1+1/x)^x$: Er wordt ons gevraagd om $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ te berekenen. Laten we eerst $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\big(f(x)\big)$ berekenen.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \ln\big(f(x)\big) &= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}
\end{aligned}$$

Dit leidt tot de onbepaalde vorm 0/0, dus passen we de regel van l'Hôpital toe.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+1/x}\cdot(-1/x^2)}{(-1/x^2)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+1/x} \\
&= 1
\end{aligned}$$

We concluderen dat $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\big(f(x)\big) = 1$, waarna we teruggrijpen naar de oorspronkelijke limiet:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln(f(x))} = e^1 = e.$$

2. Deze limiet leidt tot de onbepaalde vorm 0^0. Stel $f(x) = x^x$ en beschouw eerst $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \ln\big(f(x)\big)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to0\\>}} \ln\big(f(x)\big) &= \lim_{\substack{x\to0\\>}} \ln\big(x^x\big) \\
&= \lim_{\substack{x\to0\\>}} x\ln(x) \\
&= \lim_{\substack{x\to0\\>}} \frac{\ln(x)}{1/x}.
\end{aligned}$$

Dit leidt tot de onbepaalde vorm ∞/∞, dus passen we de regel van l'Hôpital toe.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\substack{x\to0\\>}} \frac{1/x}{-1/x^2} \\
&= \lim_{\substack{x\to0\\>}} (-x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dus $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \ln\big(f(x)\big) = 0$. We keren tot slot terug naar de oorspronkelijke limiet:

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} x^x = \lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\>}} e^{\ln(f(x))} = e^0 = 1.$$

Dit resultaat wordt bevestigd door de grafiek van $f(x) = x^x$ gegeven in Figuur 9.9.

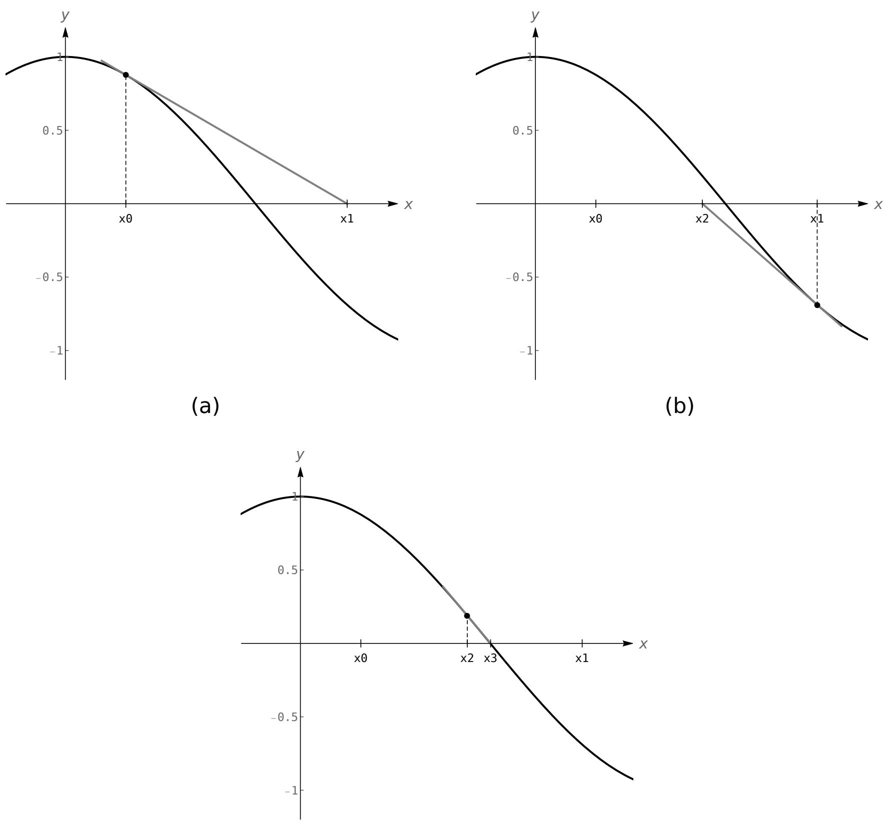
9.7 Toepassingen van afgeleide

9.7.1 De methode van Newton

Het oplossen van vergelijkingen is één van de belangrijkste vragen in de wiskunde, maar toch zijn we verrassend beperkt in de vergelijkingen die we analytisch kunnen oplossen. Zo kunnen eenvoudige vergelijkingen zoals $x^5 + x + 1 = 0$ of $\cos(x) = x$ onmogelijk analytisch opgelost worden in termen van elementaire functies. Gelukkig zijn er methoden ontworpen die ons benaderde oplossingen kunnen leveren voor dergelijke vergelijkingen. Die methoden leveren typisch een benadering die correct is tot op een gewenst aantal decimalen. In Sectie 8.5.2 introduceerden we de halveringsmethode. Hier focussen we op een andere techniek (die in het algemeen sneller werkt), genaamd de **methode van Newton** (*Newton's method*) .

De methode van Newton is gebaseerd op raaklijnen. Het hoofdidee is dat wanneer x voldoende dicht bij een wortel van $f(x)$ ligt, de raaklijn van de grafiek in $(x, f(x))$ de x-as zal snijden in een punt dat dichter ligt bij die wortel dan x.

We starten de methode van Newton met een gok x_0 waar de wortel ongeveer ligt (Figuur 9.12(a)). Teken vervolgens de raaklijn aan de grafiek in $(x_0, f(x_0))$ en kijk waar die de x-as snijdt. Noem dat punt x_1. Herhaal daarna het proces – teken de raaklijn aan de grafiek in $(x_1, f(x_1))$ en kijk waar die de x-as snijdt (Figuur 9.12(b)). Noem dat punt x_2. Herhaal deze stappen om x_3, x_4, enzovoort, te bekomen. Die rij van punten zal meestal redelijk snel convergeren naar een wortel van f (Figuur 9.12(c)).



Figuur 9.12: De methode van Newton. Merk op hoe dicht x_3 ligt bij een oplossing van $f(x) = 0$.

Algebraïsch gaan we als volgt te werk. We vonden x_1 met behulp van de raaklijn aan de grafiek in $(x_0, f(x_0))$. De richtingscoëfficiënt van die raaklijn is $f'(x_0)$ en haar vergelijking is

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Deze rechte snijdt de x-as als $y = 0$. De x–waarde waarin deze die as snijdt noemden we x_1. Stel dus $y = 0$ en vervang x door x_1, wat leidt tot:

$$0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0).$$

Los deze vergelijking op naar x_1:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Analoog vinden we

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

In het algemeen kunnen we, gegeven een benadering x_n, de volgende benadering x_{n+1} bekomen als:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

We vatten alles samen voor een functie f die afleidbaar is over een interval I met een nulpunt in I. Doe het volgende om de waarde van de wortel te schatten tot op d decimalen:

1. Kies x_0 als initiële benadering van het nulpunt. Vaak kijken we daarvoor naar de grafiek van f.
2. Maak iteratief benaderingen: gegeven een benadering x_n, bereken de volgende x_{n+1} als
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$
3. Stop van zodra twee opeenvolgende benaderingen gelijk zijn in de eerste d plaatsen na de komma.

De methode van Newton is niet onfeilbaar. De benaderingen zouden niet kunnen convergeren, of het kan in sommige gevallen te traag convergeren. Hoewel het geen (directe) methode is om vergelijkingen zoals $f(x) = g(x)$ op te lossen, is dat geen probleem. We kunnen die vergelijking schrijven als $f(x) - g(x) = 0$ en daarop de methode toepassen.

We kunnen de methode natuurlijk automatiseren op een computer, maar hier zullen we kijken hoe de methode van Newton werkt aan de hand van een concreet voorbeeld op papier.

Voorbeeld 9.25

Benader de reële wortel van $f(x) = x^3 - x^2 - 1 = 0$ tot op 3 cijfers na de komma, door gebruik te maken van de methode van Newton met $x_0 = 1$.

Oplossing

Allereerst berekenen we de afgeleide $f'(x) = 3x^2 - 2x$. Daarna passen we de methode van Newton toe.

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1^3 - 1^2 - 1}{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1} = 2,$$

$$x_2 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{2^3 - 2^2 - 1}{3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2} = 1.625,$$

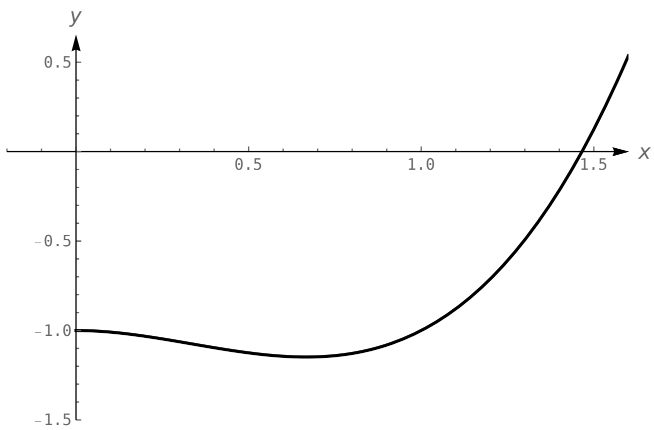
$$x_3 = 1.625 - \frac{f(1.625)}{f'(1.625)} = 1.625 - \frac{1.625^3 - 1.625^2 - 1}{3 \cdot 1.625^2 - 2 \cdot 1.625} \approx 1.48579.$$

$$x_4 = 1.48579 - \frac{f(1.48579)}{f'(1.48579)} \approx 1.46596$$

$$x_5 = 1.46596 - \frac{f(1.46596)}{f'(1.46596)} \approx 1.46557$$

We voerden 5 iteraties van de methode van Newton uit om een nulpunt te vinden dat correct is tot op 3 decimalen. Onze finale benadering is 1.465. De exacte waarde van de wortel, tot op 6 cijfers na de komma, is 1.465571. Het blijkt dat x_5 accuraat is tot op meer dan 3 decimalen.

De grafiek van $f(x)$ wordt gegeven in Figuur 9.13. We zien er dat onze initiële benadering $x_0 = 1$ vrij slecht gekozen was; een betere gok zou $x_0 = 1.5$ geweest zijn. Onze keuze was gebaseerd op het gemak van de eerste berekening en toont aan dat de methode van Newton robuust genoeg is om te kunnen omgaan met een niet zo accurate eerste schatting.



Figuur 9.13: De grafiek van $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ in Voorbeeld 9.25.

Hoewel de methode van Newton niet altijd werkt, doet ze dat meestal wel, en is ze in het algemeen zeer snel. Van zodra de benaderingen dicht genoeg bij het nulpunt liggen, kan de methode van Newton zelfs het correcte aantal decimalen verdubbelen tijdens elke stap.

9.7.2 Differentialen

Herinner je dat we de afgeleide van een functie f kunnen gebruiken om de richtingscoëfficiënt van een raaklijn aan de grafiek van f te bepalen. In $x = c$ heeft de raaklijn van de grafiek van f als vergelijking

$$y = f'(c)(x - c) + f(c).$$

De raaklijn is nuttig om benaderingen te maken van $f(x)$ voor waarden van x in de buurt van c.

We zullen dat idee nu veralgemenen. Gegeven $f(x)$ en een x-waarde c, wordt de raaklijn gegeven door

$$y = \ell(x) = f'(c)(x - c) + f(c).$$

Er geldt duidelijk dat $f(c) = \ell(c)$. Zij Δx een klein getal dat een verandering in de x-waarde voorstelt.

We zien dat:

$$f(c+\Delta x) \approx \ell(c+\Delta x),$$

aangezien de raaklijn van een functie de waarden van die functie goed benadert rond $x = c$.

Als de x-waarde verandert van c naar $c+\Delta x$, verandert de y-waarde van $f(c)$ naar $f(c+\Delta x)$. Die verandering noteren we als Δy:

$$\Delta y = f(c+\Delta x) - f(c).$$

Vervangen we $f(c+\Delta x)$ door diens raaklijnbenadering, dan hebben we

$$\begin{aligned}\Delta y &\approx \ell(c+\Delta x) - f(c)\\ &= f'(c)\big((c+\Delta x) - c\big) + f(c) - f(c)\\ &= f'(c)\Delta x\,.\end{aligned} \tag{9.4}$$

Die laatste vergelijking is belangrijk. Ze zal de basis vormen van de volgende definitie. Kort gezegd beschrijft die dat wanneer de x-waarde verandert van c naar $c+\Delta x$, de y-waarde met ongeveer $f'(c)\Delta x$ verandert.

We introduceren nu twee nieuwe veranderlijken dx en dy.

Definitie 9.8 (Differentialen van *x* en *y*)

Zij $y = f(x)$ een afleidbare functie. De **differentiaal** (*differential*) van x, genoteerd dx, is eender welk niet-nul reëel getal. De differentiaal van y, genoteerd dy, is dan

$$dy = f'(x)dx.$$

We kunnen de bovenstaande vergelijking oplossen naar $f'(x)$: dan krijgen we $f'(x) = dy/dx$. Dat vertelt ons dat de afgeleide van f naar x gelijk is aan de differentiaal van y gedeeld door de differentiaal van x. Dit is een alternatieve notatie voor de afgeleide, dy/dx. Die laatste notatie werd gekozen wegens de breukachtige eigenschappen van de afgeleide, en was één symbool en geen breuk.

In het algemeen hebben we, als $y = f(x)$ een afleidbare functie is, het volgende:

1. Zij Δx een kleine, niet-nul verandering in x-waarde.
2. Zij dx een kleine, niet-nul verandering in x-waarde (i.e. $\Delta x = dx$).
3. Dan is Δy de verandering in y-waarde als x verandert met Δx:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

4. En is $dy = f'(x)dx$. Wegens vergelijking (9.4) is dit een benadering van de verandering in y-waarde als x verandert met Δx; $dy \approx \Delta y$.

Differentialen bieden zowel praktische als theoretische voordelen. We verkennen ze allebei.

Voorbeeld 9.26

Beschouw $f(x) = x^2$. Wetende dat $f(3) = 9$, benader $f(3.1)$.

Oplossing

De x-waarde verandert van $x = 3$ naar $x = 3.1$; we hebben dus dat $dx = 0.1$. Als we weten hoeveel de y-waarde verandert van $f(3)$ naar $f(3.1)$ (i.e. als we Δy kennen) weten we wat $f(3.1)$

is, omdat we $f(3)$ al kennen. We benaderen Δy door dy.

$$\begin{aligned}\Delta y &\approx dy \\ &= f'(3)dx \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 0.1 = 0.6.\end{aligned}$$

We verwachten dat de y-waarde wijzigt met ongeveer 0.6, dus schatten we $f(3.1) \approx 9.6$.

Het is natuurlijk gemakkelijk om het eigenlijke antwoord te berekenen: $3.1^2 = 9.61$. Waarom doen we dan al die moeite? In de meeste situaties kennen we de functie die een bepaald gedrag beschrijft niet. In plaats daarvan kunnen we alleen metingen doen over hoe sterk dingen veranderen – metingen van de afgeleide.

Beeld je in hoe water stroomt in een kanaal. Het is vrij gemakkelijk om de snelheid en de zin (d.i. de snelheidsvector) van het water te meten, maar het is moeilijk om een functie te vinden die de algehele stroming beschrijft. Het is bijgevolg moeilijk om te voorspellen waar een drijvend object geplaatst aan het begin van het kanaal zich zal bevinden na een zekere periode. We kunnen echter een realistisch pad schatten met behulp van differentialen. Over kleine intervallen is dat pad immers bijna lineair. Differentialen laten ons toe om het echte pad te benaderen door vele kleine lineaire stukjes samen te voegen. Die techniek noemen we de **methode van Euler** (*Euler's method*).

We gebruiken differentialen om de waarde van een functie te schatten. Hoewel rekenmachines alomtegenwoordig zijn, is het verhelderend om te zien hoe die technieken gebruikt kunnen worden om iets dat moeilijk lijkt, op een simpele manier te berekenen.

Differentialen zullen belangrijk blijken wanneer we het hebben over integratie (Hoofdstuk 12). In het licht daarvan oefenen we ons op het berekenen van differentialen in het algemeen.

Voorbeeld 9.27

Bepaal de differentiaal dy in elk van de volgende gevallen.

1. $y = \sin(x)$
2. $y = e^x(x^2+2)$
3. $y = \sqrt{x^2+3x-1}$

Oplossing

1. Stel $f(x) = \sin(x)$, dan is $f'(x) = \cos(x)$. Dus
$$dy = \cos(x)dx.$$
2. Stel $f(x) = e^x(x^2+2)$. We bepalen $f'(x)$ met de productregel. Er geldt
$$f'(x) = e^x(x^2+2) + 2xe^x,$$
dus
$$dy = \big(e^x(x^2+2) + 2xe^x\big)dx.$$
3. Stel $f(x) = \sqrt{x^2+3x-1}$. We berekenen $f'(x)$ via de kettingregel:
$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2+3x-1)^{-\frac{1}{2}}(2x+3) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x-1}}.$$

Dus

$$dy = \frac{(2x+3)dx}{2\sqrt{x^2+3x-1}}.$$

De differentiaal dy van $y = f(x)$ bepalen is niet echt moeilijker dan de afgeleide van f te berekenen. We moeten alleen $f'(x)$ vermenigvuldigen met dx. Het is belangrijk om te onthouden dat we simpelweg het symbool "dx" op het einde toevoegen.

We hebben het nut van differentialen bekeken om benaderingen te maken. Een andere toepassing is **foutenpropagatie** (*error propagation*). Stel dat een lengte gemeten wordt als x, terwijl de echte waarde gelijk is aan $x+\Delta x$ (met Δx de fout, waarvan we hopen dat die klein is). Die meting van x kan later gebruikt worden om een andere waarde te berekenen. We kunnen die andere waarde beschouwen als $f(x)$ voor een zekere functie f. Omdat de echte waarde gelijk is aan $x+\Delta x$, hadden we eigenlijk $f(x+\Delta x)$ moeten berekenen. Het verschil tussen $f(x)$ en $f(x+\Delta x)$ noemen we de gepropageerde fout. Hoe dicht liggen $f(x)$ en $f(x+\Delta x)$ bij elkaar? Het antwoord is een verschil in y-waarden:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y \approx dy.$$

We kunnen de gepropageerde fout benaderen met differentialen.

Voorbeeld 9.28

Een stalen kogellager wordt vervaardigd met een diameter van 2cm. Het productieproces heeft een speling van ±0.1mm diameter. Gegeven dat de dichtheid van staal ongeveer 7.85g/cm^3 bedraagt, schat de gepropageerde fout in de massa van de kogellager.

Oplossing

De massa van de kogellager kan je vinden via de vergelijking massa = volume × densiteit. In deze situatie is de massa een product van de straal van de kogellager, en dus gelijk aan $m = 7.85\frac{4}{3}\pi r^3$. De differentiaal van de massa is

$$dm = 31.4\pi r^2 dr.$$

De straal moet 1cm zijn en de afwijking bedraagt ±0.05mm, of ±0.005cm. De gepropageerde fout is dus ongeveer:

$$\begin{aligned}\Delta m &\approx dm\\ &= 31.4\pi(1)^2(\pm 0.005)\\ &= \pm 0.493\text{g}\end{aligned}$$

Is die fout significant? Dat hangt natuurlijk af van de toepassing, maar we kunnen een beter idee krijgen door de **relatieve fout** (*relative error*) te berekenen. De verhouding tussen de fout en de totale massa is

$$\begin{aligned}\frac{dm}{m} &= \pm\frac{0.493}{7.85\frac{4}{3}\pi}\\ &= \pm\frac{0.493}{32.88}\\ &= \pm 0.015,\end{aligned}$$

of ±1.5%.

Als de diameter van de kogellager bijvoorbeeld 10cm zou moeten zijn, zou hetzelfde productieproces een afwijking van ±12.33g op de massa toelaten. Dit komt overeen met een relatieve fout van ±0.188%. Hoewel de absolute fout nu veel groter is (12.33g > 0.493g), is de relatieve fout kleiner.

We sluiten dit hoofdstuk af met een laatste, zeer belangrijke ingenieurstoepassing van de afgeleide.

9.8 Taylorreeksen

9.8.1 Taylorveeltermen

Beschouw een functie $y = f(x)$ en een punt $\big(c, f(c)\big)$. De afgeleide, $f'(c)$, geeft ogenblikkelijke snelheid van verandering van f in $x = c$. Van alle rechten die door het punt $\big(c, f(c)\big)$ gaan, is de rechte die f het best benadert in dat punt, de raaklijn met de richtingscoëfficiënt $f'(c)$.

In Figuur 9.14(a) zien we de grafiek van een functie $y = f(x)$ waarvan de afgeleiden in $x = 0$ gegeven worden in Tabel 9.1:

Tabel 9.1: Afgeleiden van een functie $f(x)$ geëvalueerd in $x = 0$.

$f(0) = 2$	$f'''(0) = -1$
$f'(0) = 1$	$f^{(4)}(0) = -12$
$f''(0) = 2$	$f^{(5)}(0) = -19$

Deze tabel toont dat $f(0) = 2$ en $f'(0) = 1$. De raaklijn van f in $x = 0$ is bijgevolg $p_1(x) = 1(x-0)+2 = x+2$. De raaklijn wordt ook gegeven in Figuur 9.14(a). Merk op dat in de buurt van $x = 0$, $p_1(x) \approx f(x)$. Een tekortkoming van die benadering is dat de raaklijn niet de concaviteit van f weerspiegelt. We kunnen nu een veelterm vinden, $p_2(x)$, die dat wel doet. Uit Tabel 9.1 weten we:

$$f(0) = 2 \qquad f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 2.$$

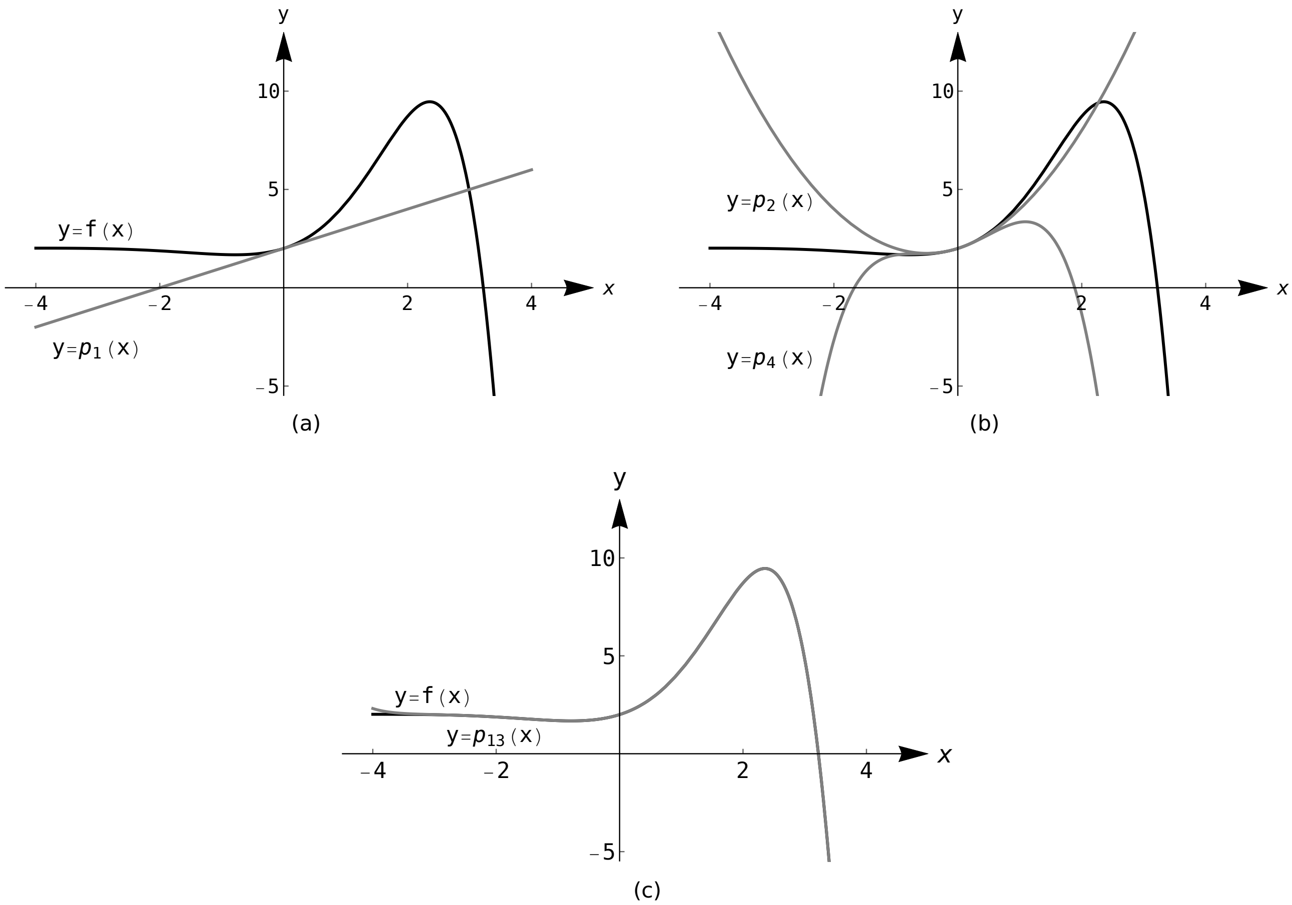
We willen dan ook dat

$$p_2(0) = 2 \qquad p_2'(0) = 1 \qquad p_2''(0) = 2.$$

Om $p_2(x)$ zo eenvoudig mogelijk te houden, gaan we er niet alleen van uit dat $p_2''(0) = 2$, maar ook dat $p_2''(x) = 2$. De tweede afgeleide van p_2 moet dus constant zijn. Als $p_2''(x) = 2$, dan is $p_2'(x) = 2x + C$ voor een zekere constante C. Omdat we hebben afgeleid dat $p_2'(0) = 1$, vinden we dat $C = 1$ en dus $p_2'(x) = 2x+1$. Uiteindelijk kunnen we $p_2(x) = x^2 + x + C$ bepalen. Vermits $p_2(0) = 2$ vinden we dat $C = 2$. We besluiten dat $p_2(x) = x^2 + x + 2$. De grafiek van deze functie wordt samen met die van f geplot in Figuur 9.14(b).

We kunnen dit benaderingsproces herhalen door veeltermen van hogere graad te definiëren waarvoor steeds hogere afgeleiden zullen overeenkomen met die van f in $x = 0$. In het algemeen kunnen we een veelterm van graad n vinden die de eerste n afgeleiden gemeen heeft met die van f. Figuur 9.14(b) toont ook $p_4(x) = -x^4/2 - x^3/6 + x^2 + x + 2$, waarvan de eerste vier afgeleiden overeenkomen met die van f.

Naarmate we meer afgeleiden gebruiken, wordt onze benadering van f steeds accurater. In dit voorbeeld wordt het interval waarover de benadering goed is ook groter. Figuur 9.14(c) geeft $p_{13}(x)$ weer. We kunnen visueel vaststellen dat deze veelterm f zeer goed benadert over $[-2, 3]$. Merk echter op dat het voorschrift van $p_{13}(x)$ niet mooi oogt en dat we de coëfficiënten van de hogere-orde termen bepaald hebben met Mathematica.



Figuur 9.14: De grafiek van de functie f en de raaklijn in $x=0$ (a) , f, p_2 en p_4 (b), en f en p_{13} (c).

$$p_{13}(x) = \frac{16901x^{13}}{6227020800} + \frac{13x^{12}}{1209600} - \frac{1321x^{11}}{39916800} - \frac{779x^{10}}{1814400} - \frac{359x^9}{362880} + \frac{x^8}{240} + \frac{139x^7}{5040} + \frac{11x^6}{360} - \frac{19x^5}{120} - \frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{6} + x^2 + x + 2.$$

Bovenstaande zijn voorbeelden van **Taylorveeltermen** (*Taylor polynomials*), genoemd naar de Britse wiskundige Brook Taylor. Men kan aantonen dat Taylorveeltermen een algemeen patroon hebben dat een directere definitie mogelijk maakt.

Definitie 9.9 (Taylor- en MacLaurin-veeltermen)

Zij f een functie waarvan de eerste n afgeleiden bestaan in $x = x_0$.

1. De **Taylorveelterm van graad n van f in $x = x_0$** is

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

2. Een speciaal geval van de Taylorveelterm is de Maclaurin-veelterm, waarbij $x_0 = 0$. Met andere woorden, de **Maclaurin-veelterm van graad n van f** is

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

9.8.2 De Stelling van Taylor

Taylorveeltermen worden gebruikt om functies $f(x)$ te benaderen in hoofdzakelijk twee situaties:

1. Wanneer $f(x)$ gekend is, maar misschien moeilijk om direct te evalueren. Zo kunnen we bijvoorbeeld $y = \cos(x)$ definiëren als de verhouding van zijden van een rechthoekige driehoek, maar ook met behulp van de eenheidscirkel. Geen van beide levert echter een handige manier om $\cos(2)$ te berekenen. Een Taylorveelterm van voldoende hoge graad biedt een uitweg om dit uit te rekenen met bewerkingen die ingebouwd zijn in een computer ($+$, $-$, $\times$ en $\div$).
2. Wanneer $f(x)$ niet gekend is, maar we wel informatie hebben over de afgeleiden. Dat komt vaker voor dan je zou denken, vooral in de studie van differentiaalvergelijkingen.

In beide situaties is het belangrijk om te weten hoe goed die benadering is. Als we een Taylorveelterm gebruiken om $\cos(2)$ te berekenen, hoe accuraat is die?

De volgende stelling levert die informatie.

Stelling 9.9 (Stelling van Taylor)

1. *Zij f een functie waarvan de $(n+1)$-ste afgeleide bestaat over een interval I en zij x_0 in I. Dan bestaat er voor elke x in I een θ_x tussen x en x_0 zodat*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \frac{f^{(n+1)}(\theta_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \end{aligned}$$

met $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$ de restterm.

2. $\left|R_n(x)\right| \leq \dfrac{\max\left|f^{(n+1)}(\theta)\right|}{(n+1)!}\left|(x-x_0)^{(n+1)}\right|$, *waarbij θ bevat is in I.*

In feite zegt het eerste deel van de stelling van Taylor dat $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$, met $p_n(x)$ de n-de orde Taylorveelterm en $R_n(x)$ de rest, of fout, in de Taylor-benadering. Het tweede deel vertelt ons hoe groot die fout kan zijn. Als de $(n+1)$-ste afgeleide groot is over I, kan die fout groot zijn, net als x ver van x_0 ligt. De $(n+1)!$ in de noemer verzekert er ons echter van dat de fout kleiner wordt naarmate n toeneemt.

We kunnen ook beroep doen op de stelling van Taylor om een n te bepalen die ons garandeert dat de benadering een zekere precisie heeft.

Voorbeeld 9.29

Bepaal n zodat de n-de Taylorveelterm van $f(x) = \cos(x)$ in $x = 0$ de waarde $\cos(2)$ benadert tot op 0.001. Wat is $p_n(2)$?

Oplossing

Om de stelling van Taylor toe te passen, hebben we grenzen nodig op de grootte van de afgeleiden van $f(x) = \cos(x)$. In het geval van deze goniometrische functie is dat niet zo moeilijk. De afgeleiden van de cosinus zijn $\pm\sin(x)$ of $\pm\cos(x)$. Die functies zijn nooit groter dan 1 in absolute waarde. We willen nu de fout in onze benadering beperken tot 0.001. Om de geschikte n te vinden, beschouwen we de volgende ongelijkheden:

$$\begin{aligned}\frac{\max\left|f^{(n+1)}(\theta)\right|}{(n+1)!}\left|(2-0)^{(n+1)}\right| &\leq 0.001\\ \frac{1}{(n+1)!}\cdot 2^{(n+1)} &\leq 0.001\end{aligned}$$

We bepalen een n die voldoet aan die laatste ongelijkheid via trial–and–error. Als $n = 8$, hebben we $\dfrac{2^{8+1}}{(8+1)!} \approx 0.0014$ en als $n = 9$, hebben we $\dfrac{2^{9+1}}{(9+1)!} \approx 0.000282 < 0.001$. We zullen $\cos(2)$ daarom benaderen door $p_9(2)$. We zullen nu $p_9(x)$ bepalen. We hebben opnieuw een tabel nodig van de afgeleiden van $f(x) = \cos(x)$, geëvalueerd in $x = 0$ (Tabel 9.2).

Tabel 9.2: De afgeleiden van $f(x) = \cos(x)$, in $x = 0$.

Afgeleide functie	afgeleide in $x = 0$
$f(x) = \cos(x)$	$f(0) = 1$
$f'(x) = -\sin(x)$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos(x)$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = \sin(x)$	$f'''(0) = 0$
$f^{(4)}(x) = \cos(x)$	$f^{(4)}(0) = 1$
$f^{(5)}(x) = -\sin(x)$	$f^{(5)}(0) = 0$
$f^{(6)}(x) = -\cos(x)$	$f^{(6)}(0) = -1$
$f^{(7)}(x) = \sin(x)$	$f^{(7)}(0) = 0$
$f^{(8)}(x) = \cos(x)$	$f^{(8)}(0) = 1$
$f^{(9)}(x) = -\sin(x)$	$f^{(9)}(0) = 0$

Merk op hoe deze afgeleiden een zeker patroon volgen. Alle oneven machten van x in de Taylor-veelterm verdwijnen, want hun coëfficiënt is 0. Hoewel we $p_9(x)$ nodig hebben voor het bepalen van de beoogde precisie, toont dit aan dat deze equivalent is met $p_8(x)$.

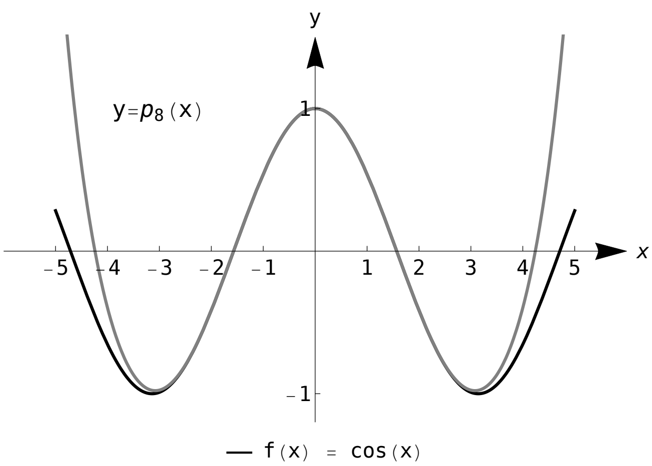
Omdat we onze veelterm construeren voor $x = 0$, zijn we in feite een Maclaurin-veelterm aan het construeren, en:

$$\begin{aligned} p_8(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(8)}(0)}{8!}x^8 \\ &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 \end{aligned}$$

We benaderen uiteindelijk $\cos(2)$:

$$\cos(2) \approx p_8(2) = -\frac{131}{315} \approx -0.41587.$$

De grens op de fout garandeert dat deze benadering binnen 0.001 van het correcte antwoord ligt. in feite ligt ons resultaat zelfs binnen ongeveer 0.0003 van het correcte antwoord. Figuur 9.15 toont de grafiek van $y = p_8(x)$ en $y = \cos(x)$. Merk op hoe goed de grafiek van functies overeenkomen over $]-\pi, \pi[$.



Figuur 9.15: De grafiek van $f(x) = \cos(x)$ (zwart) en haar Maclaurin-veelterm (grijs).

9.8.3 Taylorreeksen

In Sectie 9.8.1 toonden we hoe we functies kunnen benaderen met veeltermen, zolang er genoeg informatie is over de afgeleiden. In deze sectie gaan we een stap verder: als een functie $f(x)$ oneindig keer afleidbaar is, tonen we aan hoe we die functie kunnen voorstellen als een machtreeks.

Definitie 9.10 (Taylor- en Maclaurin-reeksen)

Zij $f(x)$ afleidbaar tot op elke orde in $x = x_0$.

1. De **Taylorreeks van** $f(x)$ (*Taylor series*) gecentreerd rond x_0 is

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

2. $x_0 = 0$ stellen, geeft de **Maclaurin-reeks van** $f(x)$ (*Maclaurin series*):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Merk op dat de orde van een Taylorreeks bepaald wordt door de hoogste-orde afgeleide die erin voorkomt. Zo bevat de derde-orde Taylorreeks ontwikkeling van een functie f termen tot die met x^3. Als $p_n(x)$ de n-de graads Taylorveelterm is van $f(x)$ gecentreerd rond $x = x_0$, zagen we hoe $f(x)$ bijna gelijk is aan $p_n(x)$ in de buurt van $x = x_0$. We zagen eveneens hoe een toename van de graad van die veelterm in het algemeen die fout deed afnemen. We beschouwen nu reeksen, waarbij we een oneindig aantal termen sommeren. Ons ultieme doel is om die fout te laten verdwijnen en te kunnen bewijzen dat een functie gelijk is aan haar Taylorreeks. Je vraagt je nu waarschijnlijk af of de sommen in Definitie 9.10 niet altijd aanleiding zullen geven tot $\pm\infty$. Men kan echter bewijzen dat het resultaat een reëel getal is voor de functies die we doorheen deze cursus beschouwen.

Wanneer we de Taylorveelterm van graad n opstellen voor een functie $f(x)$ in $x = x_0$, moeten we f en haar eerste n afgeleiden evalueren in $x = x_0$. Wanneer we de Taylorreeks opstellen van f, helpt het om een patroon te vinden zodat we de n-de afgeleide van f in $x = x_0$ kunnen neerschrijven. We illustreren dat in het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 9.30

Bepaal de Taylorreeks ontwikkeling van $f(x) = \ln(x)$ gecentreerd rond $x = 1$.

Oplossing

Tabel 9.3 toont de n-de afgeleide van $\ln(x)$ in $x = 1$ voor $n = 0, \ldots, 5$, samen met de uitdrukking voor de n-de term:

$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)! \quad \text{for } n \geq 1.$$

Het is dat wat Taylorreeksen onderscheidt van Taylorveeltermen; we zijn geïnteresseerd in de bepaling van een patroon voor de n-de term, en niet alleen een eindige verzameling van coëfficiënten voor een veelterm.

Tabel 9.3: De afgeleiden van $\ln(x)$ geëvalueerd in $x = 1$.

Afgeleide functie	afgeleide in $x = 1$
$f(x) = \ln(x)$	$f(1) = 0$
$f'(x) = 1/x$	$f'(1) = 1$
$f''(x) = -1/x^2$	$f''(1) = -1$
$f'''(x) = 2/x^3$	$f'''(1) = 2$
$f^{(4)}(x) = -6/x^4$	$f^{(4)}(1) = -6$
$f^{(5)}(x) = 24/x^5$	$f^{(5)}(1) = 24$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}$	$f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!$

Aangezien $f(1) = \ln(1) = 0$, slaan we de eerste term over en beginnen we bij $n = 1$, gegeven de Taylorreeks voor $\ln(x)$ gecentreerd rond $x = 1$, als

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}(n-1)!\frac{1}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}.$$

Merk op dat we (nog) niet kunnen zeggen of $\ln(x)$ gelijk is aan de bijhorende Taylorreeks over $]0,2]$.

In Mathematica is het mogelijk om de **reeksontwikkeling** (*series expansion*) van een functie te bepalen. Om bijvoorbeeld de Taylorreeks van $f(x) = \ln(x)$ gecentreerd rond $x = 1$ te bepalen, kunnen we als volgt werken met het de ingebouwde functie `Series`.

```
In[14]:= Series[Log[x],{x,1,5}]

Out[14]= (x-1)-1/2 (x-1)^2+1/3 (x-1)^3-1/4 (x-1)^4+1/5 (x-1)^5+O[x-1]^6
```

De algemene syntax van het commando is

```
In[15]:= Series[f[x],{x,x0,n},]
```

met `f[x]` de functie in kwestie, `x` de veranderlijke, `x0` het punt waarrond de reeks gecentreerd is en `n` de orde. Het is belangrijk om op te merken dat Definitie 9.10 een Taylorreeks definieert gegeven een functie $f(x)$, maar niets zegt over hun gelijkheid. We zullen zien dat deze in de meeste gevallen gelijk zijn, maar we moeten daartoe wel enkele voorwaarden beschouwen.

Stelling 9.9 stelt dat de afwijking tussen een functie $f(x)$ en haar n-de graads Taylorveelterm $p_n(x)$ gelijk is aan $R_n(x)$, met

$$\left|R_n(x)\right| \leq \frac{\max\left|f^{(n+1)}(\theta)\right|}{(n+1)!}\left|(x-x_0)^{(n+1)}\right|.$$

Als $R_n(x)$ nadert tot 0 voor elke x in een interval I als n nadert tot oneindig, besluiten we dat de functie gelijk is aan haar Taylorreeks ontwikkeling. Dat wordt formeel gemaakt in de volgende stelling.

Stelling 9.10 (Gelijkheid van een functie en haar Taylorreeks)

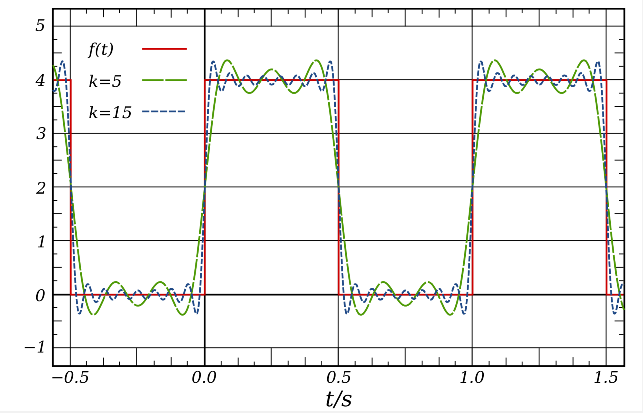
Zij $f(x)$ een functie met afgeleiden van alle ordes in $x = x_0$, i.e. $f(x)$ is een gladde functie, zij $R_n(x)$ zoals in Stelling 9.9, en zij I een interval. Als $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ voor alle x in I, dan

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \text{ on } I.$$

Het is vaak natuurlijk om aan te nemen dat een functie gelijk is aan haar Taylorreeks, maar dat is niet altijd het geval. We moeten hiervoor steunen op Stelling 9.10. Bewijzen dat $R_n(x) \to 0$ kan moeilijk zijn. Zo is het geen evidentie om aan te tonen dat $\ln(x)$ gelijk is aan haar Taylorreeks over $]0,2]$ zoals we zagen in Voorbeeld 9.30.

Fourier-reeks

Een Fourier-reeks is een andere soort reeks, die gebruikt wordt om een functie voor te stellen als een som van sinusgolven. Ze ontbindt een periodieke functie in de som van een (mogelijks oneindige) verzameling van sinussen en cosinussen. De Fourier-reeks heeft veel toepassingen in de elektrische ingenieurswetenschappen, trillingsanalyse, akoestiek, optica, signaalverwerking, beeldverwerking, kwantummechanica, econometrie, enzovoort. Figuur 9.16 geeft de Fourier-reeks benadering weer van een blokgolf met 5 en 15 termen.



Figuur 9.16: Fourier-reeks benadering van een blokgolf met 5 en 15 termen.

Een functie $f(x)$ die gelijk is aan haar Taylorreeks gecentreerd rond eender welk punt van het domein van $f(x)$, noemen we een **analytische functie** (*analytic function*). De meeste functies die we zullen tegenkomen zijn analytische functies. Algemeen gesproken is elke functie die je kan samenstellen met elementaire functies (veeltermen, exponentiëlen, goniometrische functies, etc.) en die niet stuksgewijs gedefinieerd is, waarschijnlijk analytisch. Bij de meeste functies mogen we ervan uitgaan dat ze gelijk zijn aan hun Taylorreeks en gebruiken we alleen Stelling 9.10 wanneer we vermoeden dat er iets niet zou kunnen werken zoals verwacht.

We bepalen de Taylorreeks voor een andere belangrijke functie en geven daarna een tabel met de Taylorreeks ontwikkelingen voor een aantal veelvoorkomende functies.

Voorbeeld 9.31

Bepaal de Maclaurin-reeks ontwikkelingen van $f(x) = (1+x)^k$ met $k \neq 0$.

Oplossing

Als k een positief geheel getal is, dan is de Maclaurin-reeks eindig. Als $k = 4$ hebben we bijvoorbeeld

$$f(x) = (1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4.$$

De coëfficiënten van x wanneer k een positief geheel getal is, zijn bekend als de binomiale coëfficiënten, wat de reeks die we aan het opstellen zijn, haar naam geeft. Als $k = 1/2$ hebben we $f(x) = \sqrt{1+x}$. Als we de reeksontwikkeling van deze functie zouden kennen, krijgen we ook een handige manier om bijvoorbeeld $\sqrt{1.3}$ te benaderen. Om de Maclaurin-reeks voor $f(x) = (1+x)^k$ op te stellen voor een willekeurige waarde van $k \neq 0$, beschouwen we de afgeleiden van f in $x = 0$ (Tabel 9.4).

Tabel 9.4: De afgeleiden van $f(x) = (1+x)^k$ geëvalueerd in $x = 0$.

Afgeleide functie	afgeleide in $x = 0$
$f(x) = (1+x)^k$	$f(0) = 1$
$f'(x) = k(1+x)^{k-1}$	$f'(0) = k$
$f''(x) = k(k-1)(1+x)^{k-2}$	$f''(0) = k(k-1)$
$f'''(x) = k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3}$	$f'''(0) = k(k-1)(k-2)$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(x) = k(k-1)\cdots\big(k-(n-1)\big)(1+x)^{k-n}$	$f^{(n)}(0) = k(k-1)\cdots\big(k-(n-1)\big)$

De Maclaurin-reeks ontwikkeling van $f(x) = (1+x)^k$ is dus

$$1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{k(k-1)\cdots\big(k-(n-1)\big)}{n!}x^n+\ldots.$$

We hebben geleerd dat Taylorveeltermen een manier bieden om een moeilijk te berekenen functie te benaderen met een veelterm. Taylorreeksen daarentegen stellen ons in staat om een functie exact voor te stellen met een reeks. Je ziet wellicht wel het nut in van een goede benadering, maar is het een voordeel om een functie exact voor te stellen als een reeks? Ja, naast andere nuttige aspecten leveren ze een waardevol middel om een heleboel problemen op te lossen, bijvoorbeeld met betrekking tot integralen en differentiaalvergelijkingen.

In Tabel 9.5 geven we de Taylorreeks ontwikkeling van een aantal veelvoorkomende functies.

We geven ook nog een stelling over de algebra van machtreeksen. Dit laat ons bijvoorbeeld toe om de Taylorreeks ontwikkeling van functies als $f(x) = e^x\cos(x)$ te bepalen vormt de reeksen van e^x en $\cos(x)$.

Stelling 9.11 (Algebra van machtreeksen)

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *en* $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ *en zij* $h(x)$ *een continue functie.*

1. $f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \pm b_n)x^n$.

Tabel 9.5: Belangrijke Taylorreeks ontwikkelingen.

Functie en reeks	Eerste paar termen
$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$
$\ln(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$	$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$
$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k(k-1)\cdots\big(k-(n-1)\big)}{n!} x^n$	$1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \cdots$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$

2. $f(x)g(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots a_n b_0\big) x^n.$

3. $f\big(h(x)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \big(h(x)\big)^n.$

We kunnen ook calculustechnieken toepassen op Taylorreeksen, in het bijzonder kunnen we de afgeleiden en primitieven van reeksen berekenen.

Stelling 9.12 (Afgeleiden en onbepaalde integralen van Taylorreeksen)

Zij $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ *een functie die gedefinieerd is door een machtreeks. Dan geldt:*

1. $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1}.$

2. $\int f(x)\, dx = x_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}.$

Merk op dat afgeleiden en integralen eenvoudigweg per term berekend worden aan de hand van de machtsregels.

9.9 Oefeningen

9.9.1 Analytische oefeningen

Gemiddelde en ogenblikkelijke snelheid

Opgave 9.1 — Teken de grafiek van de functie f en verifieer de continuïteit en afleidbaarheid van f in het gegeven punt.

(a) $f(x) = |x|, \qquad x = 0$

(b) $f(x) = |x^2 - 1|, \qquad x = 1$

(c) $f(x) = |\sin(x)|, \qquad x = 0$

(d) $f(x) = \sqrt{x}, \qquad x = 0$

(e) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \qquad x = -1$

Opgave 9.2 — Bepaal de vergelijking van de raaklijn en de normaal aan de grafiek van de onderstaande krommes in het gegeven punt.

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2, \qquad x = 0$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{2+x}, \qquad x = -1$

(c) $f(x) = \sin(x), \qquad x = \dfrac{\pi}{4}$

(d) $f(x) = \tan(x), \qquad x = \dfrac{\pi}{4}$

(e) $f(x) = e^x\left(x^2 + 2\right), \qquad x = 0$

(f) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}, \qquad x = 2$

Opgave 9.3 — Bepaal de vergelijking(en) van de raaklijn(en) in het punt met abscis $x = 0$ aan de grafiek van de volgende functies

(a) $f(x) = |\sin(x)|$

(b) $f(x) = x^{2/3}$

(c) $f(x) = x^{4/3}$

(d) $f(x) = x^3$

Opgave 9.4 — Er bestaan twee niet-samenvallende, snijdende rechten die door het punt $(1, -3)$ gaan en raken aan de kromme $y = x^2$. Bepaal de vergelijkingen van deze rechten.

De kettingregel

Opgave 9.5 — Bereken de eerste afgeleide van de onderstaande functies.

(a) $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$

(b) $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$

(c) $f(x) = \dfrac{2x^2 - x}{3x + 1}$

(d) $f(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 6x + 1$

(e) $f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$

(f) $f(x) = \dfrac{3x + 2}{2x - 1}$

(g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$

(h) $f(x) = \dfrac{1}{(7x^2 + 3x - 6)^2}$

(i) $f(x) = \sqrt[3]{(2x + 3)^2}$

(j) $f(x) = x\sqrt[3]{x + 1}$

(k) $f(x) = \dfrac{x}{2x + \dfrac{1}{3x + 1}}$

(l) $f(x) = \left(1 + \sqrt{\dfrac{x - 2}{3}}\right)^4$

Opgave 9.6 — Bereken de eerste afgeleide van de onderstaande functies.

(a) $f(x) = \cos(5x)$

(b) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

(c) $f(x) = x\sin^2(x)$

(d) $f(x) = x^3\cos(x)$

(e) $f(x) = e^{-x}$

(f) $f(x) = x^5\left(\sec(x) + e^x\right)$

(g) $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{x^2}$

(h) $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)^{1/2}$

(i) $f(x) = e^{-\arcsin(x)}$

(j) $f(x) = \tan(e^x)$

(k) $f(x) = \ln\left(\sin(2x) + \sin^2(x)\right)$

(l) $f(x) = \log_{10}\left(\sqrt{9 - x^2}\right)$

(m) $f(x) = \log_2\left((x^2 + x + 2)^4\right)$

(n) $f(x) = \log_3\left(\sqrt{\dfrac{2x - 1}{2x + 1}}\right)$

(o) $f(x) = \arctan\left(x^3\right)$

(p) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)$

(q) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{x - 1}\right)$

(r) $f(x) = \dfrac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{1 + \cos\left(\sqrt{x}\right)}$

(s) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{x - b}{a}\right)$

(t) $f(x) = \left(\arcsin(x^2)\right)^{1/2}$

(u) $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + a\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$

Opgave 9.7 — Bereken de eerste afgeleide van de onderstaande functies. Vereenvoudig nadien het resultaat.

(a) $f(x) = \ln\left|\dfrac{1}{\cos(x)} + \tan(x)\right|$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\tan(x)}{\cos(x)} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1}{\cos(x)} + \tan(x)\right|$

(c) $f(x) = -\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$

(d) $f(x) = \dfrac{x}{8}\left(5-2x^2\right)\sqrt{1-x^2} + \dfrac{3}{8}\arcsin(x)$

(e) $f(x) = \ln\left|\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{a^2}\left(\ln|ax+b| + \dfrac{b}{ax+b}\right)$

(g) $f(x) = x\left(2x^2-a^2\right)\sqrt{a^2-x^2} + a^4\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$

(h) $f(x) = \dfrac{(x+1)\left(9-2x-x^2\right)}{4}\sqrt{3-2x-x^2} + 6\arcsin\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$

Impliciet afleiden

Opgave 9.8 — Beschouw de onderstaande impliciet gedefinieerde functies. Bepaal y' in functie van x en y.

(a) $x^2e^2 + 2^y = 5$

(b) $\left(3x^2+2y^3\right)^4 = 2$

(c) $xy - x + 2y = 1$

(d) $x^3y + xy^5 = 2$

(e) $x^2 + 4(y-1)^2 = 4$

(f) $\dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{x^2}{y} + 1$

(g) $\dfrac{\sin(x)+y}{\cos(y)+x} = 1$

(h) $\ln\left(x^2+xy+y^2\right) = 1$

Opgave 9.9 — Bepaal een vergelijking van de raaklijn aan de gegeven kromme in het gegeven punt.

(a) $\dfrac{x}{y} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^3 = 2, \qquad (-1,-1)$

(b) $x\sin(xy-y^2) = x^2-1, \qquad (1,1)$

(c) $\left(x^2+y^2+x\right)^2 = x^2+y^2, \qquad (0,1)$

Opgave 9.10 — We beschouwen $x^2+4y^2=4$. Bepaal y'' in functie van x en y.

Opgave 9.11 — Bepaal de eerste afgeleide van de onderstaande functies.

(a) $f(x) = \dfrac{x^x}{x+1}$

(b) $f(x) = x^{\sin(x)+2}$

(c) $f(x) = \left(\sin(x)\right)^{\ln(x)} \quad$ met $x \in]0,\pi[$

(d) $f(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\ln(x)}$

(e) $f(x) = (\cos(x))^x - x^{\cos(x)}$

(f) $f(x) = \dfrac{x^{\ln(x)}(\sin(x))^x}{x^x\ln(x)}$

Afleiden van inverse functies

Opgave 9.12 — We beschouwen een injectieve functie $f(x)$ waarvoor geldt dat $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Bepaal $(f^{-1})'(x)$.

Opgave 9.13 — Beschouw de onderstaande functies en bereken de gevraagde afgeleide.

(a) $f(x) = 1 + 2x^3, \qquad (f^{-1})'(x)$

(b) $f(x) = x\sqrt{3+x^2}, \qquad (f^{-1})'(-2)$

(c) $f(x) = \dfrac{4x^3}{x^2+1}, \qquad (f^{-1})'(2)$

(d) $f(x) = x^3 + x, \qquad (f^{-1})'(10)$

(e) $f(x) = \sin(2x), \qquad (f^{-1})'(\sqrt{3}/2)$

(f) $f(x) = 6e^{3x}, \qquad (f^{-1})'(6)$

De regel van l'Hôpital

Opgave 9.14 — Bereken de onderstaande limieten.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin(x)}{x^3}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{3\ln(x)}{x^5 - 1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^n}{e^x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(x \tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right)$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{x}{x-1}\right)$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(2x) - 2\arcsin(x)}{x^2 \sin(x)}$

(i) $\displaystyle\lim_{x \xrightarrow[<]{} \frac{\pi}{2}} (\cos(x))^{\frac{\pi}{2} - x}$

(j) $\displaystyle\lim_{x \xrightarrow[>]{} 0} x^{\frac{3}{x+\ln(x)}}$

(k) $\displaystyle\lim_{x \xrightarrow[<]{} \frac{\pi}{2}} (\tan(x))^{\cos(x)}$

(l) $\displaystyle\lim_{x \xrightarrow[>]{} 0} (\csc(x))^{\sin^2(x)}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\cos\left(\sqrt{\frac{3}{x}}\right)\right)^x$

(n) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos(x))^{1/x^2}$

(o) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cot(x)$

Toepassingen van afgeleide

Opgave 9.15 — Een kubus heeft ribben met lengte 20 cm. Met hoeveel moet de lengte van de ribben afnemen zodat het volume van de kubus 12 cm^3 kleiner wordt?

Opgave 9.16 — Een bolvormige ballon wordt opgeblazen waardoor de straal in één minuut toeneemt van 20 cm tot 20.2 cm. Hoeveel zal het volume toenemen in één minuut?

Taylorveeltermen

Opgave 9.17 — Bepaal een reeksontwikkeling zoals gevraagd voor de onderstaande functies.

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{1-2x^2}$ in machten van x

(b) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ in machten van x

(c) $f(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2}$ in machten van x

(d) $f(x) = \ln(2-x)$ in machten van x

(e) $f(x) = \ln(x)$ in machten van $x-4$

Opgave 9.18 — Bepaal de MacLaurin-reeks van de onderstaande functies.

(a) $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$

(b) $f(x) = \cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$

(c) $f(x) = \dfrac{e^{2x^2}-1}{x^2}$

(d) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} \cos(x)$

Opgave 9.19 — Bepaal de Taylorreeks van de onderstaande functies.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ rond 1

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ in machten van $x+2$

(c) $f(x) = \sin(x) - \cos(x)$ rond $\dfrac{\pi}{4}$

(d) $f(x) = x\ln(x)$ in machten van $x-1$

(e) $f(x) = xe^x$ in machten van $x+2$

(f) $f(x) = \ln(2+x)$ in machten van $x-2$

(g) $f(x) = \cos^2(x)$ rond $\dfrac{\pi}{8}$

9.9.2 Numerieke nulpuntsbepaling

In de theorie kwamen twee methodes aan bod om een nulpunt van een functie numeriek te bepalen: de **halveringsmethode** (Sectie 8.5.2) en de **methode van Newton** (Sectie 9.7.1).

Hier zullen we beide methodes implementeren in Python. Voor degenen die nog weinig of geen ervaring hebben met programmeren, is er een Python Tutorial voorzien in Bijlage C. Daarin wordt al het nodige beschreven om dit practicum tot een goed einde te kunnen brengen. Zowel de onderstaande code als de Python Tutorial worden als Jupyter Notebooks beschikbaar gesteld.

9.9.2.1 Halveringsmethode

Hieronder volgt een implementatie van de halveringsmethode in Python. Bekijk eerst hoe deze methode vertaald wordt naar uitvoerbare Python-code en beantwoord daarna de onderstaande vragen.

```
def halvering(f, interval, eps=10**-6, max_it=100):
        '''
        Halveringsmethode voor de benadering van het nulpunt
        van de functie f over een gegeven interval [a,b],
        waarbij f(a) en f(b) van teken verschillen
```

```
    Inputs:
    - f: functie waarvan nulpunt bepaald moet worden
    - interval: interval [a,b]
    - eps: maximale benaderingsfout (default: 10^-6)
    - max_it: maximaal aantal uit te voeren iteraties

    Output:
    - nulpunt: geschat nulpunt
    '''
    print("Halveringsmethode")
    print("-----------------")
    # haal de waarden van a en b uit het interval en bereken de overeenkomstige functie-
    waarden
    a = interval[0]
    b = interval[1]
    f_a = f(a)
    f_b = f(b)

    # geef foutmelding als het teken van a en b niet verschilt
    if np.sign(f_a)==np.sign(f_b):
            print("Het teken van f(a) en f(b) verschilt niet!\n")
            return None

    # bepaal het middelpunt van het interval
    m = (a+b)/2
    f_m = f(m)

    # initialiseer de iteratie teller
    it = 0

    while abs(f_m)>=eps:
            # ga teken van m na
            if np.sign(f_a)==np.sign(f_m):
                    a=m
                    f_a=f_m
            else:
                    b=m
                    f_b = f_m
                    m = (a+b)/2
                    f_m = f(m)

            # update de iteratie teller
            it=it+1
            #stop als het maximaal iteraties bereikt is
            if it==max_it:
                    print("Maximaal aantal iteraties bereikt!")
                    break
    nulpunt = m
    print("Geschat nulpunt {}\nwerd bereikt na {} iteraties\n".format(nulpunt,it))
    print("==================================================")
    return nulpunt
```

Vraag 1.a Waarin verschilt de werkwijze in de bovenstaande implementatie met die uit Voorbeeld 8.13?

Vraag 1.b Gebruik de functie **halvering** om het nulpunt te benaderen van de volgende functies met een maximale benaderingsfout van $\epsilon = 10^{-6}$.

- $g_1(x) = \sin(x)$ over het interval $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$
- $g_2(x) = 2x^2 - 2$ over het interval $\left[-\frac{3}{2}, 0\right]$
- $g_3(x) = 2x^2 + 2$ over het interval $[-5, 5]$

Deze functies zijn beschikbaar in de file `teachingtools`, van waaruit ze als volgt kunnen worden geïmporteerd.

```
from teachingtools import g_1, g_2, g_3
```

Voor g_1 bekomen we zo:

```
>>> halvering(g_1, [3*np.pi/4, 3*np.pi/2], eps=10**-6, max_it=100);
        Halveringsmethode
        -----------------
        Geschat nulpunt 3.1415919045757357
        werd bereikt na 19 iteraties

        ==================================================
```

9.9.2.2 Methode van Newton

Een sneller alternatief voor de halveringsmethode is de methode van Newton, die werd besproken in sectie 9.7.1.

Vraag 2.a Implementeer de methode van Newton door de onderstaande code aan te vullen op de plaatsen aangegeven door "...". Alle functies en technieken nodig voor de implementatie staan in de Python Tutorial.

```
def Newton(f, df, x0, eps= 10**-6, max_it=100):
    '''
    Methode van Newton voor de benadering van het nulpunt
    van de functie f, vertrekkend van een initiële schatting x0
    Inputs:
    - f: functie waarvan nulpunt bepaald moet worden
    - df: afgeleide van functie waarvan nulpunt bepaald moet worden
    - x0: initiële schatting van het nulpunt
    - eps: maximale benaderingsfout (default: 10^-6)
    - maxI: maximaal aantal uit te voeren iteraties (default: 100)

    Output:
    - nulpunt: geschat nulpunt
    '''
    print("Methode van Newton")
    print("-------------------------")
    it = 0
    x = x0

    while ...: # aan te vullen
          ...
```

```
          ...

         if ...:  #stop als het maximaal iteraties bereikt is
                  # aan te vullen

            print("Maximaal aantal iteraties bereikt voordat aan convergentiecriterium
            werd voldaan")
            print("Controleer of er een nulpunt is.")
            return None
    nulpunt = x
    print("Geschat nulpunt {}\nwerd bereikt na {} iteraties\n".format(nulpunt,it))
    print("====================================================")
    return nulpunt
```

Vraag 2.b Bepaal met de hand of met Mathematica de afgeleide van de functies uit Vraag 1 en implementeer deze als de functies dg_i (voor i gaande van 1 tot 3).

```
def dg_1(x):
        return ...
def dg_2(x):
        return ...
def dg_3(x):
        return ...
```

Vraag 2.c Gebruik de functie **`Newton`** om het nulpunt te bepalen van de functies g_1 t.e.m. g_3 uit Vraag 1 (met een maximale benaderingsfout van $\epsilon = 10^{-6}$). Kies als startpunt $x0$ een waarde aan de rand van de opgegeven intervallen en vergelijk je resultaat met dat van de halveringsmethode. Wat valt op?